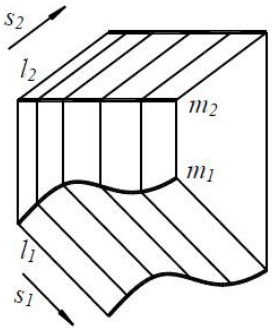
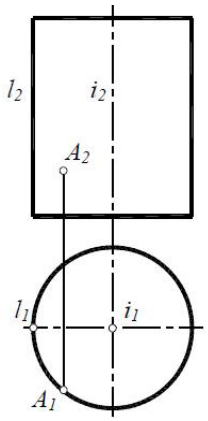
Б 33. Комплексный чертеж цилиндра вращения. Его определитель



Поверхность, образованная прямолинейной образующей l, движущейся параллельно заданному направлению s и пересекающей направляющую m, называется цилиндрической поверхностью. Чтобы задать цилиндрическую поверхность на чертеже, надо начертить направляющую кривую m и указать направление s. Графическая часть определителя дополняется алгоритмом формирования поверхности. Символическая запись алгоритма имеет вид:

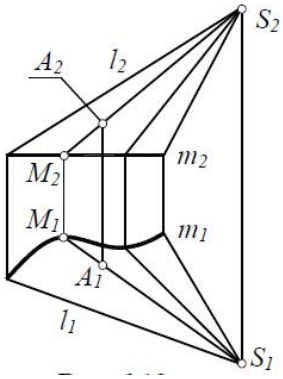


$$\boldsymbol{m} \cap \boldsymbol{l} \parallel \boldsymbol{s}$$

(«*образующая l пересекает направляющую m и движется параллельно направлению s*»).

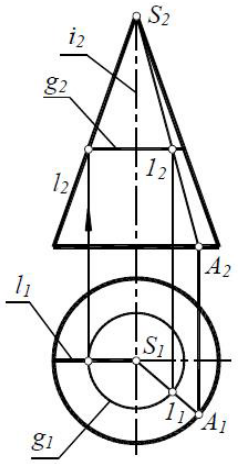
Если образующая l параллельна оси вращения i, получается *прямой круговой цилиндр*. Горизонтальная проекция A_1 произвольной точки A, принадлежащей поверхности цилиндра, лежит на горизонтальном очерке цилиндра.

Б 34. Комплексный чертеж конуса вращения. Его определитель



Поверхность, образованная движением прямолинейной образующей l, проходящей через неподвижную точку S и пересекающей направляющую m, называется конической поверхностью.

Графическая часть определителя содержит чертеж двух элементов: точки S и направляющей m. Алгоритмическая часть определителя может быть записана символически:



$$\boldsymbol{S} \in \boldsymbol{l} \cap \boldsymbol{m}$$

(«образующая l проходит через точку S и пересекает направляющую m»). Точка S называется вершиной конической поверхности.

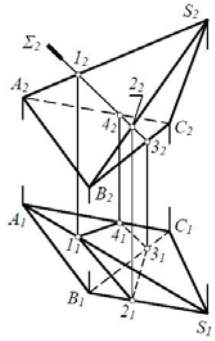
Если образующая l пересекается с осью вращения – получается *прямой круговой конус*. Чтобы найти недостающую проекцию точки на поверхности конуса, надо провести через эту точку параллель или прямолинейную образующую, принадлежащие поверхности конуса. Например, на рис. дана горизонтальная проекция точки 1, принадлежащей поверхности конуса. Чтобы определить фронтальную проекцию точки 1, проведем через 1_1 проекцию g_1 параллели g. С помощью линии связи найдем фронтальную проекцию g_2 этой параллели и отметим на ней фронтальную проекцию точки 1.

Эта же задача может быть решена с помощью образующей. Проведем через 1_1 проекцию S_1A_1 прямолинейной образующей SA. Найдем фронтальную проекцию S_2A_2 этой образующей. Фронтальная проекция 1_2 точки 1 находится на S_2A_2.

Б 35. Пересечение многогранника с плоскостью

В пересечении многогранника с плоскостью получается плоская замкнутая ломаная линия, вершинами которой являются точки пересечения ребер многогранника с секущей плоскостью.

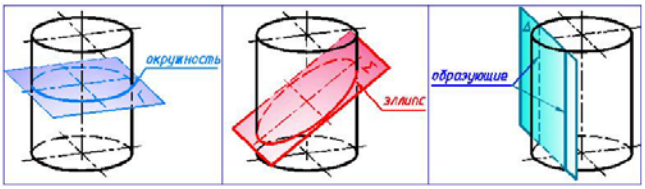
Построение линии пересечения многогранника с плоскостью сводится к определению точек пересечения ребер многогранника с плоскостью, то есть к многократному решению первой позиционной задачи. **Задача 1**. Построить линию пересечения многогранника с проецирующей плоскостью. На рис. Показан тетраэдр, рассеченный проецирующей плоскостью Σ. Отмечаем точки 1, 2, 3, 4 пересечения плоскости Σ с ребрами многогранника и соединяем найденные точки отрезками прямой линии. Получаем плоскую замкнутую ломаную линию 1-2-3-4. При построении этой линии обязательно следует учитывать следующее правило. **Правило.** Отрезками прямой соединяются только те точки, которые лежат на одной и той же грани многогранника.



Например, на рис. соединены точки 1 и 2, потому что они лежат на одной и той же грани ABS. Точки 1 и 3 соединять нельзя, так как они принадлежат разным граням тетраэдра: линия 1-3 проходит не по поверхности, а внутри тетраэдра.

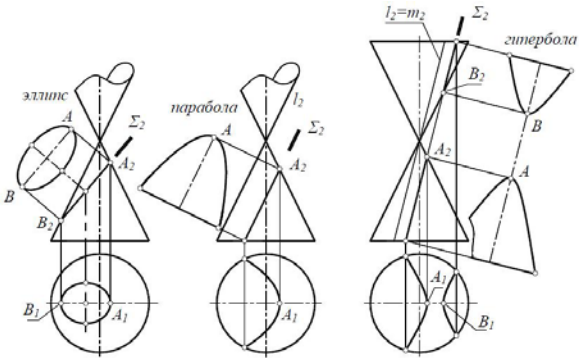
Б 36. Анализ линий пересечения цилиндра проецирующими плоскостями

Цилиндр вращения пересекается с плоскостью Г, образующей с его осью угол φ=90°, по *окружности*. Если угол φ≠90° – по *эллипсу*, если плоскость параллельна оси цилиндра – по двум *прямым*.



Б 37. Конические сечения

При пересечении конической поверхности второго порядка плоскостями могут быть получены все виды кривых второго порядка: *эллипс* (либо *окружность* как частный случай эллипса), *парабола* и *гипербола*. Эти линии называются *коническими сечениями*. Если плоскость Σ пересекает *все образующие* конуса, то в сечении получается замкнутая кривая второго порядка, не имеющая несобственных точек – *эллипс*.

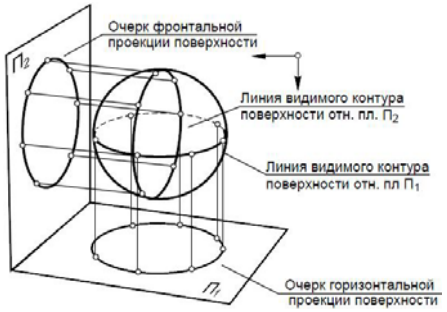


Если секущая плоскость Σ перпендикулярна оси конуса – получаем окружность (частный случай эллипса).

Если секущая плоскость Σ параллельна какой-нибудь *одной* образующей l конуса (пересекает ее в несобственной точке), то в сечении получается кривая второго порядка, имеющая одну бесконечно удаленную (несобственную) точку – *парабола*. В частности, если секущая плоскость касается конуса вдоль какой, либо образующей l – получаем параболу, выродившуюся в двойную прямую l. Если секущая плоскость Σ параллельна *двум образующим* конуса l и m (пересекает их в несобственных точках), то в сечении получается кривая второго порядка, имеющая две несобственные точки – *гипербола*. Если секущая плоскость проходит через вершину конуса, то гипербола вырождается в две пересекающиеся прямые (действительные или мнимые).

Б 38. Построение очерковых линий на примере сферы

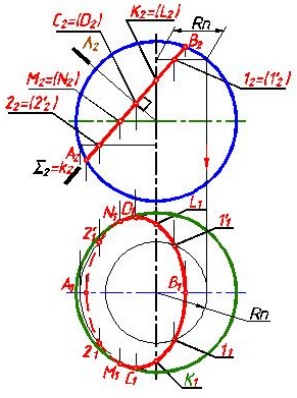
При чтении чертежа немаловажную роль играет его наглядность. Для предания чертежу поверхности большей наглядности и выразительности прибегают к построению очерков проекции на основании алгоритмической части определителя. При проецировании поверхности на какую-либо плоскость проекций часть проецирующих лучей касается ее, образуя проецирующую поверхность. Точки касания при этом образуют линию видимого контура поверхности относительно этой плоскости проекций (рис.). Очерк проекции поверхности является проекцией соответствующей линии видимого контура.



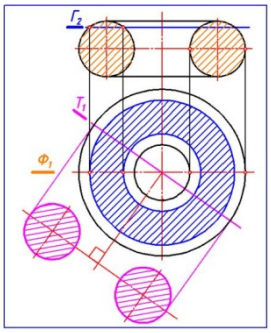
Линия видимого контура поверхности разделяет ее на две части – видимую, обращенную к наблюдателю, и невидимую. Никакая точка поверхности не может спроецироваться за пределы очерка.

Б 39. Пересечение сферы проецирующими плоскостями

Сферу плоскость пересекает по ***окружности***. В зависимости от положения секущей плоскости относительно плоскостей проекций окружность может проецироваться в *отрезок*, *окружность* или *эллипс*. Окружность сечения проецируется на плоскость Π_2 в отрезок A_2B_2, на плоскость Π_1 – в ***эллипс***, который строится по точкам. Точки ***A*** и ***B*** являются экстремальными относительно Π_1. ***B*** – высшая точка, ***A*** – низшая. Фронтальные их проекции совпадают с точками пересечения фронтальной проекции плоскости **Σ** с очерком фронтальной проекции сферы. Их горизонтальные проекции находим по линиям связи на горизонтальной проекции главного меридиана. Фронтальные проекции точек ***M*** и ***N*** (точек смены видимости относительно Π_1) находим на пересечении Σ_2 с фронтальной проекцией экватора сферы. Их горизонтальные проекции – по линиям связи на очерке горизонтальной проекции сферы. Экстремальные относительно Π_2 точки ***C*** и ***D*** (самая ближняя и самая дальняя) определяются при помощи **общей плоскости симметрии** ***Λ***, которая проводится через центр сферы перпендикулярно плоскости **Σ**. Для нахождения промежуточных точек, ***1*** и ***1'*** используем параллель ***n***, проходящую через эти точки. Радиус параллели ***Rn***, как и любой другой, измеряем от оси до очерка. На Π_1 параллель проецируется в окружность. Соединив полученные точки плавной кривой с учетом видимости, получим эллипс, являющийся горизонтальной проекцией фигуры сечения сферы плоскостью **Σ.**



Б 40. Круговые сечения тора



Плоскость ***Г***, перпендикулярная оси тора (горизонтальная плоскость уровня), пересекает тор ***по двум окружностям*** (параллелям).

Фронтальная плоскость уровня ***Ф*** проходит через ось тора и пересекает его ***по двум окружностям.***

Плоскость ***Т*** проходит через ось тора и пересекает его ***по двум окружностям***, которые проецируются без искажения на плоскость параллельную плоскости ***Т***.

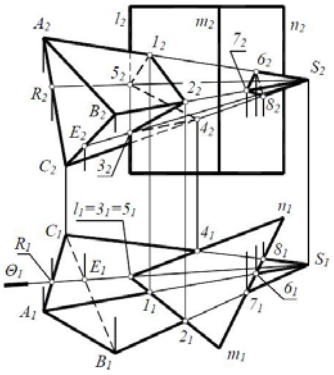
Б 41. Общая схема построения линии пересечения поверхностей

Две поверхности пересекаются по линии, которая одновременно принадлежит каждой из них. В зависимости от вида и взаимного положения поверхностей линия их пересечения может быть *прямой*, *ломаной* или *кривой* (плоской или пространственной). Пересечение может быть полным (*проницание*), когда все образующие или ребра одной поверхности пересекаются с другой поверхностью, или частичным (*врезка*). При проницании линия пересечения распадается на две замкнутые самостоятельные кривые или ломаные. Задача определения линии пересечения двух поверхностей называется *второй позиционной задачей*. Решение этой задачи сводится к построению ряда точек, одновременно принадлежащих каждой из пересекающихся поверхностей. Линия, соединяющая эти точки, будет искомой. Точки, образующие линию пересечения, разделяют на *опорные* и *промежуточные*. В первую очередь определяют опорные точки: на ребрах многогранников, экстремальные и очерковые. Для нахождения общих точек применяют принцип принадлежности или используют вспомогательные поверхности: плоскости или сферы.

Последовательность решения задач на построение линии пересечения поверхностей:

1. выясняем вид и расположение заданных поверхностей относительно друг друга (врезка или проницание) и плоскостей проекций (задана ли проецирующая поверхность);
2. определяем характер линии пересечения: замкнутая ломаная, совокупность плоских кривых, замкнутая кривая, др;
3. определяем опорные точки (на ребрах многогранников, экстремальные и очерковые);
4. определяем промежуточные точки (если строим кривую линию);
5. соединяем найденные точки (отрезками прямой, или кривой линией). Определяем видимость проекций линии пересечения и очерков поверхностей, обводим чертеж.

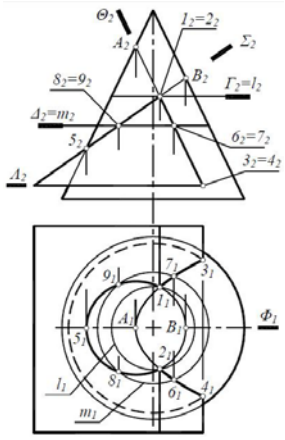
Б 42. Пересечение двух многогранников



Линия пересечения многогранников – *замкнутая пространственная ломаная* линия (случай врезки), или две замкнутые ломаные (случай проницания). Вершины ломаной – точки пересечения ребер первого многогранника с гранями второго и ребер второго многогранника с гранями первого, а стороны – линии пересечения граней многогранников. Решение задачи заключается в нахождении вершин или сторон ломаной. В первом случае задача сводится к многократному построению точки пересечения прямой (ребра) с плоскостью, во втором – к многократному построению линии пересечения двух плоскостей. После определения вершин ломаной (опорных точек) соединяем отрезками прямых те пары вершин, которые принадлежат одной и той же грани первого многогранника и одновременно одной и той же грани второго с учетом видимости. На рис. показан случай *проницания*: пирамида *ABCS* «прокалывает» трехгранную призму. При этом линия пересечения распадается на две замкнутые ломаные: пространственную ломаную линию *1-2-3-4-5-1* (границу «входного отверстия» в призме) и плоскую ломаную *6-7-8* (границу «выходного отверстия»). В пересечении принимают участие все боковые ребра пирамиды и только одно ребро *l* вертикальной призмы. Ребра *m* и *n* призмы в пересечении с пирамидой не участвуют. Боковые грани призмы занимают горизонтально-проецирующее положение, поэтому точки *1*, *2*, *4*, *6*, *7*, *8* пересечения ребер пирамиды с гранями призмы отмечаются на горизонтальной плоскости проекций без вспомогательных построений. Фронтальные проекции этих точек найдены с помощью линий связи.

Для построения точек *3* и *5* пересечения ребра *l* призмы с гранями пирамиды потребовалось провести через ребро *l* вспомогательную секущую плоскость *Θ*. Эта плоскость “разрезала” боковые грани пирамиды по прямым *RS* и *ES*. На пересечении прямой *l* с линиями *RS* и *ES* отмечены точки *3* и *5*, в которых ребро *l* призмы пересекается с гранями пирамиды. Найденные точки пересечения ребер с гранями определяют вершины искомой ломаной линии пересечения многогранников.

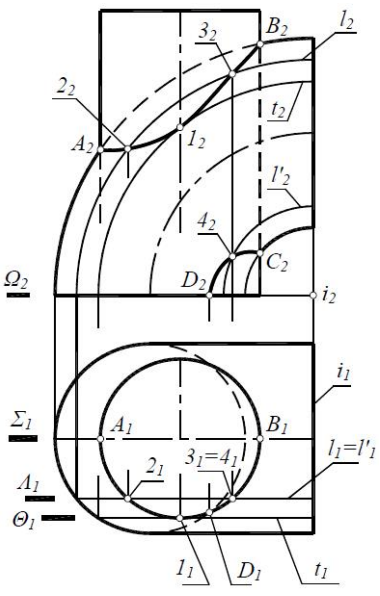
Б 43. Построение линии пересечения многогранной и кривой поверхностей



Линия пересечения кривой и многогранной поверхностей является *совокупностью нескольких плоских кривых*, каждая из которых – результат пересечения кривой поверхности с одной из граней многогранника. Эти плоские кривые попарно пересекаются в точках пересечения ребер многогранника с кривой поверхностью. Построение линии пересечения произвольной поверхности с многогранником сводится к построению линии пересечения данной поверхности с каждой гранью многогранника.

Задача. Построить линию пересечения прямого кругового конуса и трехгранной призмы. Боковые грани призмы занимают фронтально-проецирующее положение, поэтому фронтальная проекция искомой линии пересечения совпадает с фронтальным очерком призмы (с той его частью, которая заключена “внутри” фронтального очерка конуса). Отмечаем на фронтальной проекции опорные точки *1…5* и с помощью вспомогательных секущих плоскостей находим их горизонтальные проекции. Например, через точки *1* и *2* проведена секущая плоскость *Г*, пересекающая конус по окружности *l*. Горизонтальные проекции точек *1*, *2* принадлежат горизонтальной проекции *l1* этой окружности. Промежуточные точки *6*, *7* и *8*, *9* найдены с помощью вспомогательной плоскости *Δ*, пересекающей конус по параллели *m*. Горизонтальные проекции этих точек принадлежат горизонтальной проекции *m1* параллели *m*. Грани призмы пересекают поверхность конуса по кривым второго порядка. Рассмотрим линии, возникающие в пересечении конуса с гранями призмы. 1. Грань *Θ*, параллельная очерковой образующей конуса, пересекает конус по *параболе*, для точного построения которой на чертеже отмечена ее вершина *A*. Парабола проходит через точку *A* и пары точек *1-2*, *3-4*, *6-7*, симметричные относительно общей плоскости симметрии *Ф* конуса и призмы. 2. Грань *Σ* пересекает конус по *эллипсу*. Для точного построения эллипса на чертеже отмечена точка *B* пересечения плоскости *Σ* и очерковой образующей конуса. Эллипс проходит через точку *B* (самая верхняя точка эллипса), через точку *5* (самая нижняя точка эллипса) и через пары точек *1-2*, *8-9*. 3. Горизонтальная грань *Λ* пересекает поверхность конуса по *окружности*, проходящей через пару симметричных относительно *Ф* точек *3-4*. Таким образом, линия пересечения конуса и призмы складывается из участка параболы, участка эллипса и участка окружности. Эллипс и парабола стыкуются в точках *1* и *2*, парабола и окружность – в точках *3* и *4*. В этих точках составная линия пересечения претерпевает излом.

Б 44. Построение линии пересечения кривых поверхностей



В общем случае линия пересечения двух кривых поверхностей – пространственная кривая линия. Порядок этой линии равен произведению порядков поверхностей. В частных случаях эта линия может распадаться на несколько замкнутых плоских или пространственных кривых. При пересечении двух произвольных поверхностей возможны два случая: врезка и проницание. При врезке линия пересечения представляет собой замкнутую пространственную кривую. При проницании эта линия распадается на две замкнутые пространственные кривые. **Задача.** Построить линию пересечения поверхностей открытого тора и кругового цилиндра (рис.). Для определения опорных точек вводим в рассмотрение общую плоскость симметрии *Σ* данных фигур. Фронтальные проекции линий пересечения тора и цилиндра плоскостью *Σ* совпадают с их фронтальными очерками, поэтому точки *A*, B, C пересечения очерковых линий принадлежат искомой линии пересечения. Точка *B* – экстремальная относительно горизонтальной плоскости проекций, точка *A* – наиболее удалена от профильной *плоскости (экстремальная относительно П3). Опорная точка D* отмечается в плоскости *Ω* на пересечении линий основания тора и цилиндра. Построение промежуточных точек упрощается тем, что одна из заданных поверхностей – проецирующая. В рассматриваемом примере цилиндрическая поверхность занимает горизонтально-проецирующее положение, поэтому на плоскости *П1 проекция искомой линии пересечения совпадает с проекцией цилиндра*. Плоскость *Θ*, касающаяся цилиндра и перпендикулярная к оси тора, рассекает тор по параллели *t*. На этой параллели отмечаем опорную точку *1* (экстремальную относительно *П2*). Проводим произвольную вспомогательную секущую плоскость *Λ*, перпендикулярную оси вращения *i* тора. Эта плоскость пересекает тор по окружностям (параллелям) *l* и *l′*. Начертив фронтальные проекции параллелей *l* и *l′*, отмечаем на них промежуточные точки *2*, *3*, *4*. Соединяя найденные опорные и промежуточные точки, получаем фронтальную проекцию искомой линии

пересечения тора и цилиндра (ее горизонтальная проекция совпадает с горизонтальной проекцией цилиндра). Линия пересечения тора и цилиндра симметрична относительно их общей плоскости симметрии Σ.

Б 45. Построение линии пересечения поверхностей способом вспомогательных концентрических сфер

Последовательность решения задач на построение линии пересечения кривых поверхностей

1) выясняем вид и расположение заданных поверхностей относительно друг друга (врезка или проницание) и плоскостей проекций (задана ли проецирующая поверхность);

2) определяем характер линии пересечения: замкнутая кривая одна, или несколько;

3) определяем опорные точки (экстремальные и очерковые);

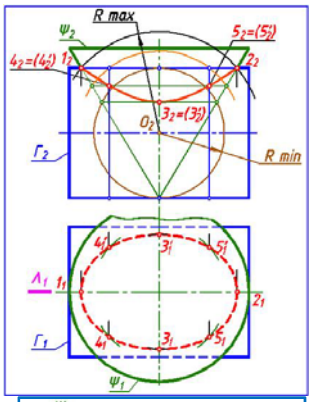
4) определяем промежуточные точки;

5) соединяем найденные точки плавной кривой. Определяем видимость проекций линии пересечения и очерков поверхностей, обводим чертеж.

Соосными называются поверхности вращения, имеющие общую ось. *Соосные* поверхности вращения пересекаться по *окружностям*. Иногда при построении линии пересечения поверхностей целесообразно в качестве вспомогательных поверхностей использовать не плоскости, а сферы.

Если оси поверхностей вращения пересекаются и принадлежат плоскости, параллельной одной из плоскостей проекций, то для построения линии их пересечения могут быть использованы сферы с различными радиусами, центр которых находится в точке пересечения осей данных поверхностей.

При этом минимальный радиус /R min/ равен радиусу наибольшей из сфер, вписанных в эти поверхности, а максимальный /R max/ – длине отрезка, выражающего расстояние от точки пересечения осей до наиболее удаленной точки пересечения очерковых образующих.

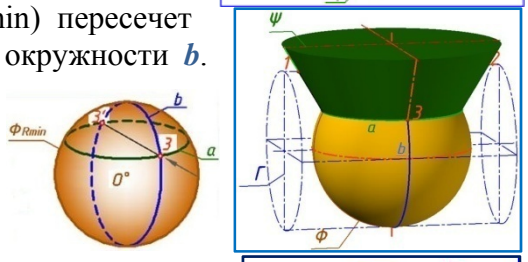


Задача. Построить проекции линии пересечения поверхностей цилиндра (Γ) и конуса (Ψ). Определить видимость проекций линии пересечения и очерков геометрических фигур.

1) Заданы две поверхности вращения. Случай врезки. Оси поверхностей пересекаются. Имеется общая плоскость симметрии ***Λ***, параллельная Π_2.

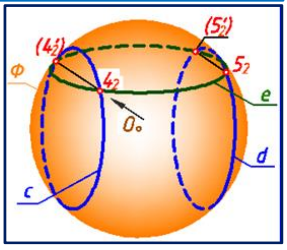
2) Линия пересечения – пространственная замкнутая кривая, проекций которой на чертеже нет.

3) Опорные точки: ***1, 2,*** – экстремальные и в то же время очерковые на Π_2, найдены с помощью общей плоскости симметрии ***Λ*** (очерк – ось). Точки ***3*** и ***3′*** – экстремальные (ближняя и дальняя). Они определены с помощью сферы минимального радиуса (вписанной в цилиндр). Сфера ***Φ*** (O, R min) пересечет конус (Ψ) по окружности ***a***. Эта сфера пересечет цилиндр (Γ) по окружности ***b***. Окружность ***a*** пересечется с окружностью ***b*** в точках ***3*** и ***3′***. Горизонтальные проекции опорных точек ***3*** и ***3′*** определим по принадлежности поверхности конуса с помощью параллели ***a***. (радиус параллели – от оси до очерка).



4) Промежуточные точки ***4, 4′*** и ***5, 5′.*** найдены с помощью вспомогательной сферы (Φ) с центром в точке O, соосной с заданными поверхностями, по алгоритму:

- ***Φ*** (O, min<R<R max), ***Φ*** – сфера;
- ***Φ*** ∩ ***Γ*** = ***c***, ***d*** ***Φ*** ∩ ***Ψ*** = ***e***
  c, ***d***, ***e*** – окружности;
- ***c*** ∩ ***e*** = ***4***, ***4′***; ***d*** ∩ ***e*** = ***5***, ***5′***.

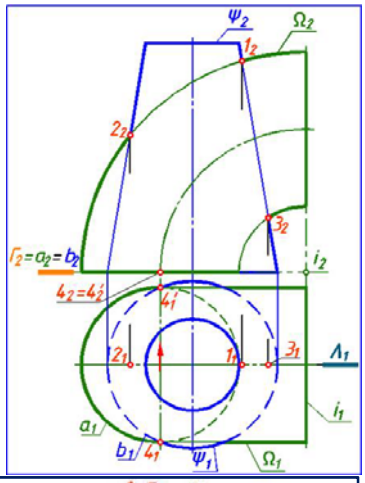


5) Соединив полученные точки плавной кривой с учетом видимости, получим проекции линии пересечения заданных поверхностей. Горизонтальная проекция линии пересечения невидима, так как основание конуса закрывает линию пересечения.

Б 46. Построение линии пересечения поверхностей способом вспомогательных эксцентрических сфер

Способ эксцентрических сфер применяют для построения линии пересечения поверхностей, имеющих *круговые сечения*, со скрещивающимися или пересекающимися осями и общей плоскостью симметрии, параллельной одной из плоскостей проекций. Сущность способа состоит в том, что выбирается сфера, пересекающая данные поверхности по окружностям. Эти окружности пересекаются между собой в точках, лежащих на искомой линии пересечения поверхностей.

Задача. Построить проекции линии пересечения поверхностей конуса(Ψ) и тора (Ω). Определить видимость проекций линии пересечения и очерков геометрических фигур.

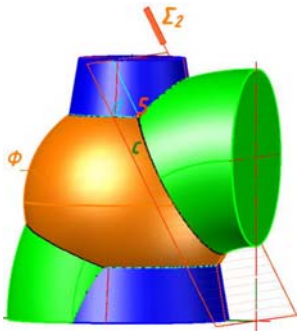


1) Заданы две поверхности вращения. Случай проницания. Оси поверхностей скрещиваются. Имеется общая плоскость симметрии *Λ*, параллельная $П_2$.

2) Линия пересечения – две пространственных кривых, проекций которых на чертеже нет.

3) Опорные точки: ***1, 2, 3 -*** экстремальные и в то же время очерковые на $П_2$, найдены с помощью общей плоскости симметрии ***Λ*** (очерк – ось). Точки ***4, 4'***, очерковые относительно $П_3$ для тора, найдены с помощью плоскости ***Γ***, пересекающей тор по окружности ***a***, конус – по окружности ***b***.

В пересечении окружностей ***a*** и ***b*** находим горизонтальные проекции опорных точек ***4, 4'.***



4). Промежуточные точки: ***5*** и ***5'*** найдены с помощью вспомогательной сферы ***Φ*** с центром в точке ***O',*** соосной с конусом ***Ψ,*** содержащей окружность ***c***, принадлежащую тору ***Ω,*** с центром в точке ***O*** по алгоритму:

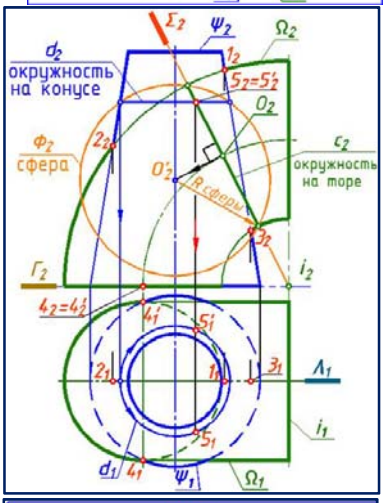
а) Φ (O', R), – сфера;

б) Φ ∩ Ω = c и **Φ ∩ Ψ = d**

c, d – окружности;

в) c ∩ d = 5, 5'.

(окружности **c** и **d** на $П_2$ проецируются в отрезки)



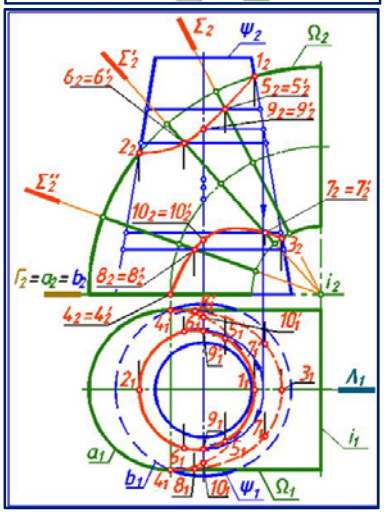
Промежуточные точки: ***6, 6'*** и ***7, 7'*** найдены с помощью вспомогательной сферы ***Φ'*** с центром в точке ***O'',*** соосной с конусом ***Ψ,*** содержащей окружность ***c',*** принадлежащую тору ***Ω,*** с центром в точке ***O'*** по алгоритму:

а) *Φ'* (O'', R), – сфера**;**

б) *Φ* ∩ Ω = *c'* и ***Φ* ∩ *Ψ* = *d'*** и ***d''***

c', d', d'' – окружности***;***

в) *c'* ∩ *d'* = *6, 6',* ***c'* ∩ *d''* = *7, 7'***



Промежуточные точки: ***8, 8'*** найдены с помощью вспомогательной сферы ***Φ '''*** с центром в точке ***O '''***, соосной с конусом ***Ψ,*** содержащей окружность ***k,*** принадлежащую тору ***Ω,*** по алгоритму:

а) *Φ'''* (O''', R), – *сфера;*

б) *Φ'''* ∩ Ω = *k* и ***Φ'''* ∩ *Ψ* = *m***

k, m – *окружности;*

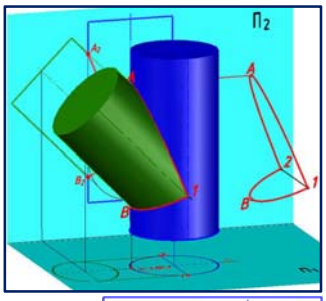
в) *k* ∩ *m* = *8, 8'.*

Очерковые относительно $П_3$ точки ***9*** **и** ***9'***, ***10*** **и** ***10'*** определены из условия принадлежности очерковым образующим (оси) конуса после построения проекции линии пересечения на $П_2$.

5) Полученные точки соединим плавными кривыми. Горизонтальная проекция верхней линии пересечения видима. Кривая **4-8-10-7-3-7'-10'-8'-4'** на $П_1$ не видима.

Очерк тора на $П_1$ следует довести до точек ***4*** и ***4'.***

Б 46. Особые случаи пересечения кривых поверхностей. Теорема о двойном касании

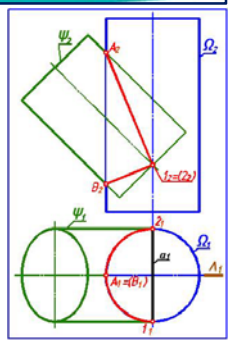


Теорема 2. Если две поверхности второго порядка касаются в двух точках, то линия их пересечения распадается на две плоские кривые (второго порядка), плоскости которых проходят через прямую, соединяющую точки касания.

Задача. Построить линию пересечения цилиндров Ψ и Ω.

1) Заданы две поверхности вращения, имеющие точки касания. Имеется общая плоскость симметрии ***Λ***. Находим точки ***1*** и ***2*** касания цилиндра **Ψ** с цилиндром **Ω.** Находим линию ***a***(*1,2*).

2) Если две поверхности второго порядка имеют касание в двух точках (***1*** и ***2***), то линия их пересечения распадается на две кривые второго порядка, плоскости которых проходят через прямую ***a***, соединяющую точки касания.

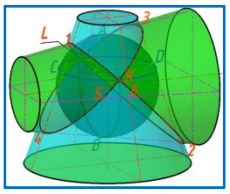


3) Опорные точки. Экстремальные относительно Π_1 (они же очерковые на Π_2) точки ***A*** и ***B*** построены с помощью общей плоскости симметрии ***Λ***, которая пересекает цилиндры по очерковым образующим**.**

4) Определять промежуточные точки нет необходимости так как проекция линии пересечения на Π_1 совпадает с частью проекции вертикального цилиндра Ω.

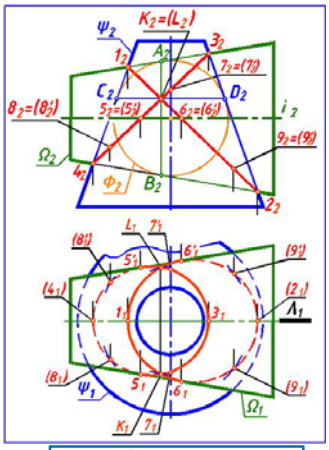
5) Соединив найденные точки (***A, 1, B***), получим проекции частей эллипсов, которые на Π_2, проецируются в отрезки [*A1*] и [*1B*].

Б 47. Особые случаи пересечения кривых поверхностей. Теорема Монжа



Теорема 3 (теорема Монжа). Если две поверхности второго порядка описаны около третьей или вписаны в нее, то они пересекаются по двум плоским кривым. Плоскости этих кривых проходят через прямую, соединяющую точки пересечения линий касания.

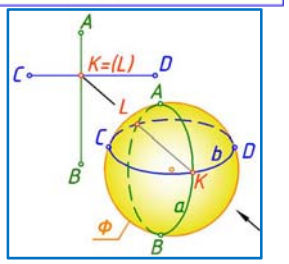
Задача. Построить проекции линии пересечения поверхностей конуса (Ω) и вертикального конуса (Ψ). Определить видимость.



1) Заданы две поверхности вращения, описанные вокруг сферы ***Φ.***

2) На основании теоремы Монжа искомая линия пересечения – две плоские кривые второго порядка.

3) Опорные точки. Экстремальные (они же очерковые относительно Π_2) точки ***1, 2, 3*** и ***4*** построены с помощью общей плоскости симметрии ***Λ*** (очерк – ось). Находим линию ***a(AB)*** касания сферы ***Φ*** и конуса ***Ω,*** соединив точки касания ***A*** и ***B.*** Находим линию ***b(CD)*** касания сферы ***Φ*** и вертикального конуса ***Ψ,*** соединив точки касания ***C*** и ***D.*** Определяем прямую ***KL,*** соединяющую точки пересечения линий ***a(AB)*** и ***b(CD)*** касания сферы ***Φ*** и конусов ***Ω*** и ***Ψ.*** Горизонтальные проекции точек ***K*** и ***L*** найдены из условия принадлежности их поверхности конуса ***Ψ*** с помощью параллели ***b*** *(радиус – от оси до очерка).*



Сфера ***Φ*** касается конуса ***Ω*** по окружности ***a(AB).*** Сфера ***Φ*** касается конуса ***Ψ*** по окружности ***b(CD).*** Определяем отрезок ***KL,*** в пересечении окружностей ***a(AB)*** и ***b(CD).*** Окружности ***a*** и ***b*** на Π_2 проецируются в отрезки *AB* и *CD,* а отрезок ***KL*** – в точку. На основании теоремы Монжа искомая линия пересечения распалась на <u>две плоские кривые</u> второго порядка (1-2 и 3-4), плоскости которых проходят через прямую KL. После построения проекции линии пересечения на Π_2 находим очерковые относительно Π_1 точки ***5, 5′*** и ***6, 6′*** из условия принадлежности горизонтальным очерковым образующим конуса ***Ω*** (ось – очерк). Очерковые относительно Π_3 точки ***7,*** и ***7′*** линии пересечения найдены из условия принадлежности их поверхности конуса ***Ψ*** с помощью параллели ***c***(радиус от оси до очерка).

4) Промежуточные точки***8,*** и ***8′*** линии пересечения найдены из условия принадлежности их поверхности конуса ***Ψ*** с помощью параллели ***d.*** Промежуточные точки ***9,*** и ***9′*** линии пересечения найдены из условия принадлежности их поверхности конуса ***Ψ*** с помощью параллели ***e.***

5) Соединив полученные точки плавной кривой с учетом видимости, получим горизонтальную проекцию линии пересечения заданных поверхностей. Точки ***5, 5′, 6, 6′*** – точки смены видимости. Доводим очерк конуса ***Ω*** до этих точек.

Б 48. Развертка поверхности. Понятие и определение

Поверхность называется *развертывающейся*, если она путем изгибания может быть совмещена с плоскостью без образования складок и разрывов. Свойством развёртываемости обладают многогранные поверхности и кривые линейчатые поверхности с ребром возврата: торсы, конические и цилиндрические.

Линейчатые косые и не линейчатые поверхности этим свойством не обладают. Существуют различные способы построения их условных разверток при помощи аппроксимации.

Плоская фигура, полученная в результате совмещения поверхности с плоскостью, называется разверткой.

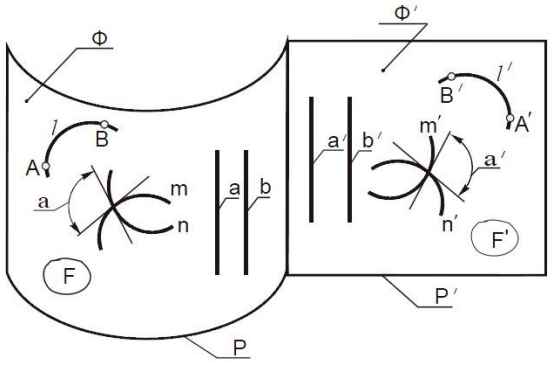
Б 49. Основные свойства развертки поверхностей

Между поверхностью и ее разверткой существует взаимно-однозначное точечное соответствие (точке А на поверхности соответствует точка А′ на развертке, и наоборот), обладающее следующими свойствами:

1) длина участка АВ линии *l* на поверхности равна длине участка А′В′ соответствующей ей линии *l′* на развертке;

2) угол α между кривыми m и n на поверхности равен углу α′ между соответствующими им кривыми m′ и n′ на развертке (углом между кривыми называется угол между касательными к ним в точке пересечения);

3) площадь отсека F поверхности равна площади соответствующего ему отсека F′ развертки.



Из рассмотренных свойств следует:

1)прямой линии (a) на поверхности соответствует прямая (a′) на развертке;

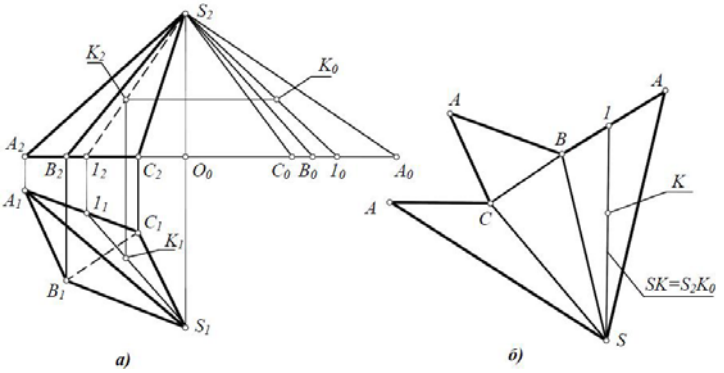
2) прямым, параллельным (a || b) на поверхности, соответствуют прямые, параллельные (a′ || b′) на развертке.

Однако, оба указанных свойства обратной силы не имеют, т.е. не всякой прямой на развёртке соответствует прямая на поверхности.

Б 50. Развертка пирамиды

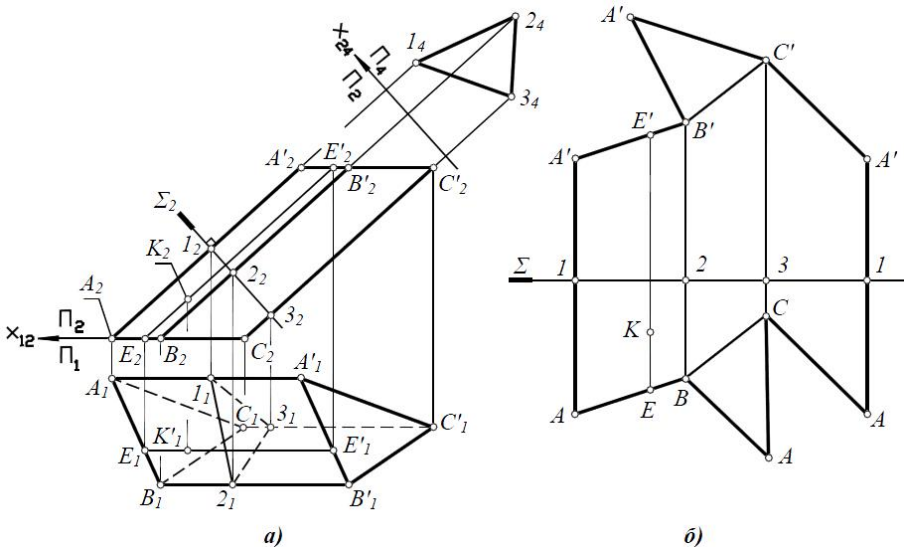
Развертка многогранника представляет собой плоскую фигуру, которая получается при совмещении граней многогранника с плоскостью. Процесс построения развертки поверхности многогранника сводится к построению истинных величин его граней, что непосредственно связано с определением натуральной (истинной) длины каждого ребра многогранника.

Для построения развертки пирамиды необходимо определить натуральные величины боковых ребер и сторон основания. На рис. 13.1, *а* изображена треугольная пирамида *ABCS*. Основанием пирамиды является треугольник *ABC*, расположенный в плоскости, параллельной горизонтальной плоскости проекций, поэтому стороны основания *AB*, *BC*, *AC* проецируются на $П_1$ в натуральную величину. Длины боковых ребер пирамиды определяются с помощью вспомогательных прямоугольных треугольников. Вспомогательные треугольники имеют общий катет S_2O_0 (разность высот концов боковых ребер пирамиды). Другой катет равен длине горизонтальной проекции соответствующего ребра. Например, в треугольнике $S_2O_0A_0$ катет S_2O_0 равен разности высот точек *S* и *A*. Другой катет O_0A_0 равен горизонтальной проекции ребра *SA*: $O_0A_0=S_1A_1$. Истинная длина ребра *SA* равна величине гипотенузы S_2A_0. Аналогично длина ребра *SB* равна S_2B_0, а длина ребра *SC* равна S_2C_0. Развертка боковой поверхности пирамиды состоит из трех примыкающих друг к другу треугольников (рис., ***б)***, конгруэнтных соответствующим граням пирамиды. Например, треугольник *ACS* (развертка соответствующей грани пирамиды) построен по известной длине стороны *AC* и найденным на рис., ***а*** длинам боковых ребер пирамиды *AS* и *CS*. К развертке боковых граней пирамиды пристраиваем ее основание *ABC*. Пусть на поверхности пирамиды отмечена точка *K*. Чтобы найти положение этой точки на развертке, проводим через *K* вспомогательную прямую *S-K-1*, отмечаем на развертке точку *1* и с помощью прямоугольного треугольника $S_2O_01_0$ находим истинную длину отрезка $SK=S_2K_0$. Откладывая этот отрезок на развертке от точки *S* вдоль прямой *S-1*, находим точку *K*.



Б 51. Развертка призмы

На рис., *а* изображена наклонная призма. Призма расположена таким образом, что ее основание параллельно горизонтальной плоскости проекций, поэтому на $П_1$ основание *ABC* призмы проецируется в натуральную величину $A_1B_1C_1$. Боковые ребра призмы параллельны фронтальной плоскости проекций, поэтому на $П_2$ они проецируются без искажения. Развертка боковой поверхности призмы может быть получена *способом нормального сечения.* Для этого боковую поверхность призмы рассекают фронтально проецирующей плоскостью Σ, перпендикулярной боковым ребрам призмы. Истинную форму нормального сечения $1_4 2_4 3_4$ определяют способом замены плоскостей проекций. Чтобы построить развертку призмы, нормальное сечение $1_4 2_4 3_4$ «разворачиваем» в прямую линию нормального сечения *1231* и через каждую точку проводим перпендикуляры к этой прямой (рис., ***б***). На каждом из построенных перпендикуляров откладываем по обе стороны от линии нормального сечения отрезки боковых ребер, измеренные на плоскости $П_2$ до нормального сечения и после него. Например, отрезки *A-1* и *1-A'* на развертке равны отрезкам $A_2 1_2$ и $1_2 A'_2$ на фронтальной проекции призмы. Точно так же $B\text{-}2=B_2 2_2$, $B'\text{-}2 = B'_2 2_2$ и $C\text{-}3=C_2 3_2$, $C'\text{-}3=C'_2 3_2$. Соединяя точки *A, B, C* и *A'*, *B'*, *C'*, получаем развертку боковой поверхности призмы.



Присоединяя к развертке боковой поверхности призмы оба основания (треугольники *ABC* и *A'B'C'*), получаем полную развертку призмы (см. рис., ***б***). На развертку призмы нанесена точка *K*, принадлежащая грани *ABB'A'*. Для построения на развертке точки *K* использована вспомогательная прямая *EE'*, проходящая через точку *K* и параллельная ребрам призмы.

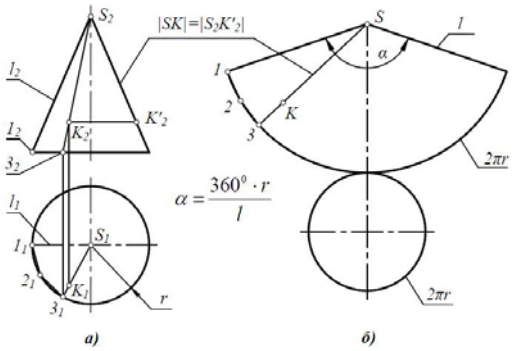
Б 52. Развертка поверхности прямого кругового конуса

Различают *точные* и *приближенные* развертки развертывающихся поверхностей. *Точная развертка* строится графоаналитическим способом по известным размерам поверхности с использованием ее уравнения. Например, *точная* развертка боковой поверхности прямого кругового цилиндра высотой *H* и радиусом основания *r* имеет форму прямоугольника с размерами сторон *H* и $2\pi r$. *Приближенная развертка* строится графическим способом с использованием чертежа поверхности. Чтобы построить приближенную развертку какой-либо развертывающейся поверхности, надо ее заменить (аппроксимировать) многогранной поверхностью. Точную развертку этой многогранной поверхности принимают за приближенную развертку данной развертывающейся поверхности.

Точная развертка поверхности прямого кругового конуса, образующая которого равна *l* и радиус основания *r* (рис., *а*), имеет форму кругового сектора с радиусом *l* и центральным углом $\alpha=360°\ r/l$ (рис., *б*).

Задача. На поверхности конуса отмечена точка K. Построить точку K на развертке конуса.

Через точку *K* на поверхности конуса проведем его образующую *S-3* (см. рис, *а*). Найдем положение образующей *S-3* на развертке конуса. Для этого дугу *1-3* кругового основания конуса заменяем ломаной линией *123*. Участки этой ломаной линии откладываем от точки *1* на развертке конуса (вдоль дуги кругового сектора). Получаем на развертке точку *3*, через которую проходит образующая *S-3*. Расстояние *SK* от вершины *S* до искомой точки *K* определено на рис. 13.3, *а* способом вращения вокруг проецирующей прямой: мысленно вращаем отрезок *SK* вокруг горизонтально-проецирующей оси конуса (см. п. 5.5). Вращение отрезка заканчивается в тот момент, когда он займет положение фронтали (совместится с фронтальной проекцией очерковой образующей конуса). Фронтальная проекция *S2K2'* повернутого отрезка определяет натуральную величину отрезка *SK*. Расстояние *SK* на развертке равно расстоянию *S2K2'* на фронтальной



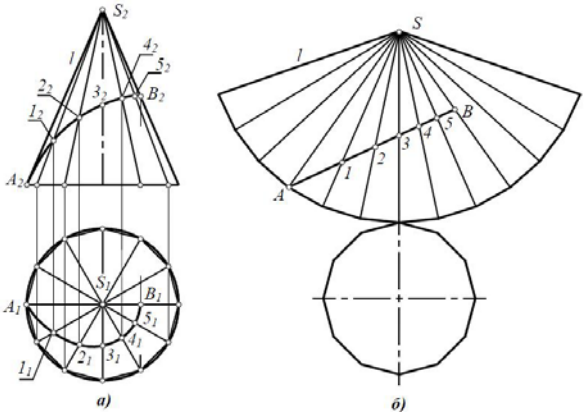
проекции конуса. Заметим, что построение точки *K* на развертке выполнено приближенным графическим способом: дуга *1-3* кругового основания конуса заменена ломаной линией *123*.

Хотя развертка конуса была построена точно, но точка *K* на развертке найдена приближенно, поэтому решение задачи в целом следует считать приближенным.

Заменим поверхность конуса поверхностью вписанной в него пирамиды. На рис., ***а*** показана правильная 12-угольная пирамида, вписанная в прямой круговой конус. Основание пирамиды – правильный 12-угольник, вписанный в круговое основание конуса. Поверхность конуса приближенно заменена двенадцатью одинаковыми треугольниками (гранями пирамиды, вписанной в конус). Это геометрическое действие (аппроксимация криволинейной поверхности сеткой треугольников) называют *триангуляцией*.

Триангуляция – замена (аппроксимация) данной поверхности многогранной поверхностью, состоящей из треугольных граней.

После аппроксимации поверхности конуса поверхностью вписанной в него пирамиды надо построить точную развертку пирамиды. Размеры всех боковых ребер пирамиды равны между собой и равны длине *l* очерковой образующей конуса. Чтобы построить развертку пирамиды, на свободном месте чертежа произвольно выбираем положение вершины развертки – точку *S*, и строим 12 одинаковых треугольников с общей вершиной *S*. Боковые стороны каждого треугольника равны длине *l* очерковой образующей конуса. Основание каждого треугольника равно длине стороны правильного многоугольника, вписанного в круговое основание конуса. Получаем развертку вписанной в конус пирамиды в виде 12 треугольников со смежными сторонами.



Построенная таким образом точная развертка пирамиды принимается за приближенную развертку боковой поверхности конуса. Основание пирамиды (правильный 12-угольник) принимается за развертку основания конуса (рис, *б*).

Отметим на поверхности конуса две точки *A* и *B* (см., *а*). Кратчайший путь между двумя точками, проложенный по данной поверхности, называют *геодезической линией*.

Построение геодезической линии *AB* на поверхности выполняется с помощью развертки. Прямой линии на развертке соответствует кратчайший путь на поверхности. Переносим точки *A*, *B* с чертежа конуса на развертку и соединяем *A* и *B* отрезком прямой (см. рис, *б*). Затем на отрезке *AB* отмечаем промежуточные точки *1*, *2*,...*5* и «возвращаем» эти точки на чертеж конуса. Соединяя плавной кривой фронтальные проекции точек *A*, *1*, *2*, *3*, *4*, *5*, *B*, получаем фронтальную проекцию геодезической линии *AB*. Соединяя плавной кривой горизонтальные проекции точек *A*, *1*, *2*, *3*, *4*, *5*, *B*, получаем горизонтальную проекцию геодезической линии *AB*. Задача решена приближенно, так как для решения использована приближенная развертка конической поверхности.