

Лекция 13

РАЗВЕРТКИ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Построение разверток представляет важную техническую задачу, так как в промышленности широко применяются конструкции и изделия из листового материала, выполненные способом изгибания. Если поверхность представить в виде тонкой, гибкой и нерастяжимой пленки, то некоторые поверхности путем изгибания можно совместить с плоскостью без разрывов и складок. Такие поверхности называются *развертывающимися*, а фигура, полученная от совмещения поверхности с плоскостью, называется *разверткой*.

Определение. *Поверхности, которые путем изгибания можно совместить с плоскостью без складок и разрывов, называются развертывающимися. Фигура, полученная от совмещения поверхности с плоскостью, называется разверткой этой поверхности.*

Поверхность и ее развертку можно рассматривать как две геометрические фигуры, между точками которых установлено взаимно однозначное соответствие. При развертывании поверхности взаимно однозначное соответствие между поверхностью и ее разверткой не нарушается: каждой точке поверхности соответствует единственная точка на развертке. Из физической модели процесса развертывания поверхности на плоскость (изгибание предварительно разрезанной поверхности без ее растяжения) следуют инвариантные метрические свойства поверхности и ее развертки.

Инвариантные метрические свойства. *На поверхности и на ее развертке сохраняются равными: расстояние между точками поверхности, углы между пересекающимися линиями в точках их пересечения и величины площадей фигур на поверхностях.*

Свойством развертываемости обладают многогранные поверхности и некоторые криволинейные поверхности. В дифференциальной геометрии доказывается, что к развертываемым криволинейным поверхностям относятся только линейчатые поверхности, состоящие исключительно из параболических точек. Касательная плоскость к такой поверхности касается ее не в одной точке, а вдоль прямолинейной образующей, проходящей через эту точку (см. п. 11.2). Отсюда следует **признак развертываемости:** *у линейчатой развертываемой поверхности касательные плоскости, проведенные во всех точках одной прямолинейной образующей, совпадают.*

Среди криволинейных поверхностей указанным признаком развертываемости на плоскость обладают только торсовые поверхности. Действительно, физическая модель образования торсовой поверхности общего вида (“перекатывание” плоскости по криволинейным направляющим a , b и соединение точек касания прямолинейной образующей, см. п. 6.2.6) предполагает существование плоскости, касающейся поверхности вдоль прямолинейной образующей. Иными словами, наличие признака развертываемости “заложено” в самом определении торсовой поверхности.

Конические и цилиндрические поверхности являются частным случаем торсовой поверхности, когда одна из криволинейных направляющих a , b вырождается в собственную или несобственную точку (см. рис. 6.26). Например, если направляющая a выродилась в собственную точку A , то получаем коническую поверхность с вершиной A и направляющей b . Если точка A – несобственная (бесконечно удалена по заданному направлению a), то получается цилиндрическая поверхность с направляющей b , образующие которой параллельны направлению a .

Таким образом, поскольку конические и цилиндрические поверхности являются частным случаем торсовой поверхности, то они так же, как и торсовые поверхности общего вида, обладают свойством развертываемости.

Вывод. Свойством развертываемости на плоскость обладают, кроме многогранных поверхностей, лишь торсовые поверхности (в частности – конические и цилиндрические поверхности).

Различают *точные* и *приближенные* развертки развертываемых поверхностей. Для любой многогранной поверхности может быть построена ее точная развертка. Действительно, если дан двухпроекционный чертеж некоторого многогранника (например, пирамиды), то на основе чертежа графическими приемами, пользуясь линейкой и циркулем, можно определить истинные длины всех ребер и построить точную развертку всех граней пирамиды.

Если же на чертеже дана какая-либо криволинейная развертываемая поверхность (например, поверхность эллиптического конуса), то с помощью линейки и циркуля может быть построена только ее приближенная развертка.

Конечно, в некоторых случаях можно построить точную развертку поверхности, используя уравнение поверхности или числа, определяющие ее размеры. Так, если дан прямой конус вращения высотой h и диаметром основания d , то этими двумя числами поверхность определена. По ним можно вычислить размеры развертки, представляющей собой круговой сектор. Рассчитав с любой желаемой степенью точности радиус сектора и его центральный угол, можно построить точную развертку конуса. Однако на практике таким “графоаналитическим” приемом пользуются редко.

В начертательной геометрии поверхность задают с помощью чертежа, а развертку строят на основе чертежа графическими способами. Поэтому развертка любой развертываемой криволинейной поверхности (конической, цилиндрической, торсовой), которая строится графически, является приближенной.

Общий способ приближенного построения развертки произвольной развертываемой поверхности заключается в следующем. *Заданную развертываемую поверхность Φ заменяют (аппроксимируют) вписанной или описанной многогранной поверхностью Φ' . Затем строят точную развертку аппроксимирующей многогранной поверхности Φ' и принимают ее за приближенную развертку данной поверхности Φ .*

Хотя все остальные поверхности (не относящиеся к многогранным, цилиндрическим, коническим, торсовым) теоретически не развертываются на плоскость, инженерная практика, тем не менее, требует построения их “разверток”. Для неразвертываемых поверхностей строят так называемые *условные* развертки.

13.1. Построение разверток поверхностей многогранников

Напомним, что многогранником называют пространственную геометрическую фигуру, со всех сторон ограниченную плоскими многоугольниками (гранями). Развертка многогранника представляет собой плоскую фигуру, которая получается при совмещении граней многогранника с плоскостью. Процесс построения развертки поверхности многогранника сводится к построению истинных величин его граней, что непосредственно связано с определением натуральной (истинной) длины каждого ребра многогранника. Рассмотрим построение разверток наиболее распространенных многогранных поверхностей – поверхностей пирамид и призм.

13.1.1. Развертка пирамиды

Поверхность n -угольной пирамиды включает в себя основание (плоский n -угольник) и боковую поверхность, состоящую из n треугольников. Для построения развертки пирамиды необходимо определить натуральные величины боковых ребер и сторон основания. На рис. 13.1, *a* изображена треугольная пирамида $ABCS$. Основанием

пирамиды является треугольник ABC , расположенный в плоскости, параллельной горизонтальной плоскости проекций, поэтому стороны основания AB , BC , AC проецируются на Π_1 в натуральную величину.

Длины боковых ребер пирамиды определяются с помощью вспомогательных прямоугольных треугольников. Вспомогательные треугольники имеют общий катет S_2O_0 (разность высот концов боковых ребер пирамиды). Другой катет равен длине горизонтальной проекции соответствующего ребра. Например, в треугольнике $S_2O_0A_0$ катет S_2O_0 равен разности высот точек S и A . Другой катет O_0A_0 равен горизонтальной проекции ребра SA : $O_0A_0=S_1A_1$. Истинная длина ребра SA равна величине гипотенузы S_2A_0 . Аналогично длина ребра SB равна S_2B_0 , а длина ребра SC равна S_2C_0 .

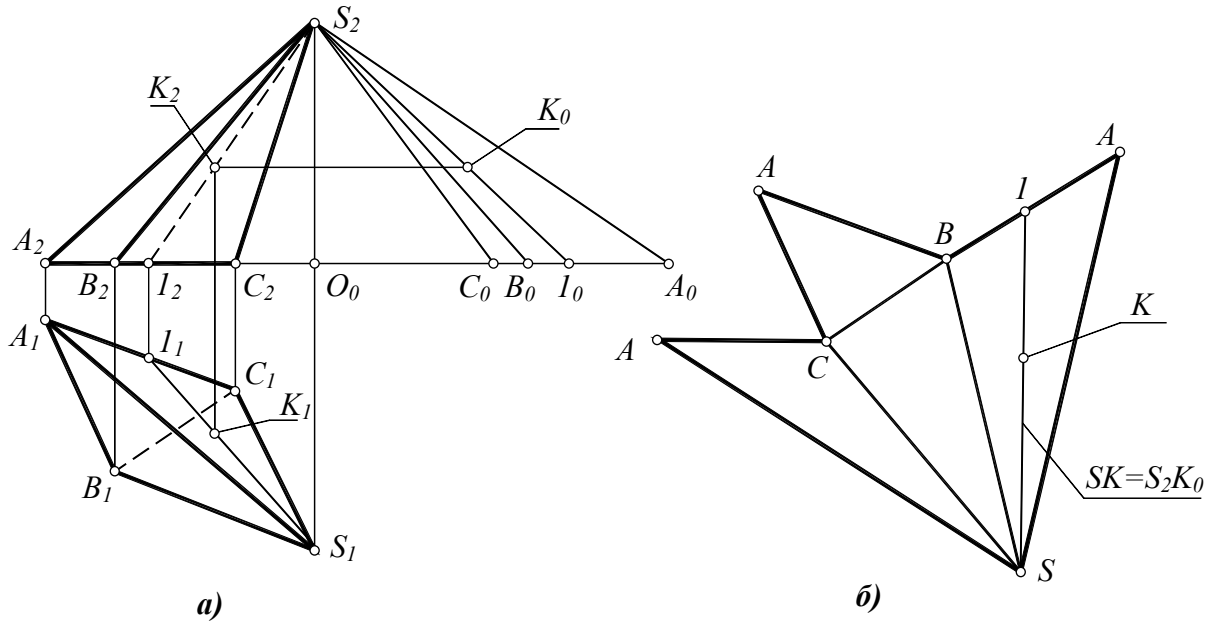


Рис. 13.1

Развертка боковой поверхности пирамиды состоит из трех примыкающих друг к другу треугольников (рис. 13.1, б), конгруэнтных соответствующим граням пирамиды. Например, треугольник ACS (развертка соответствующей грани пирамиды) построен по известной длине стороны AC и найденным на рис. 13.1, а длинам боковых ребер пирамиды AS и CS . К развертке боковых граней пирамиды пристраиваем ее основание ABC .

Пусть на поверхности пирамиды отмечена точка K . Чтобы найти положение этой точки на развертке, проводим через K вспомогательную прямую $S-K-I$, отмечаем на развертке точку I и с помощью прямоугольного треугольника $S_2O_0I_0$ находим истинную длину отрезка $SK=S_2K_0$. Откладывая этот отрезок на развертке от точки S вдоль прямой $S-I$, находим точку K .

13.1.2. Развертка призмы

На рис. 13.2, а изображена наклонная призма. Призма расположена таким образом, что ее основание параллельно горизонтальной плоскости проекций, поэтому на Π_1 основание ABC призмы проецируется в натуральную величину $A_1B_1C_1$. Боковые ребра призмы параллельны фронтальной плоскости проекций, поэтому на Π_2 они проецируются без искажения.

Развертка боковой поверхности призмы может быть получена *способом нормального сечения*. Для этого боковую поверхность призмы рассекают фронтально-

проецирующей плоскостью Σ , перпендикулярной боковым ребрам призмы. Истинную форму нормального сечения $I_4 2_4 3_4$ определяют способом замены плоскостей проекций.

Чтобы построить развертку призмы, нормальное сечение $I_4 2_4 3_4$ “разворачиваем” в прямую линию нормального сечения $I 2 3 I$ и через каждую точку проводим перпендикуляры к этой прямой (рис. 13.2, б). На каждом из построенных перпендикуляров откладываем по обе стороны от линии нормального сечения отрезки боковых ребер, измеренные на плоскости Π_2 до нормального сечения и после него. Например, отрезки $A-I$ и $I-A'$ на развертке равны отрезкам $A_2 I_2$ и $I_2 A'_2$ на фронтальной проекции призмы. Точно так же $B-2=B_2 2_2$, $B'-2=B'_2 2_2$ и $C-3=C_2 3_2$, $C'-3=C'_2 3_2$. Соединяя точки A, B, C и A', B', C' , получаем развертку боковой поверхности призмы.

Присоединяя к развертке боковой поверхности призмы оба основания (треугольники ABC и $A'B'C'$), получаем полную развертку призмы (см. рис. 13.2, б). На развертку призмы нанесена точка K , принадлежащая грани $ABB'A'$. Для построения на развертке точки K использована вспомогательная прямая EE' , проходящая через точку K и параллельная ребрам призмы.

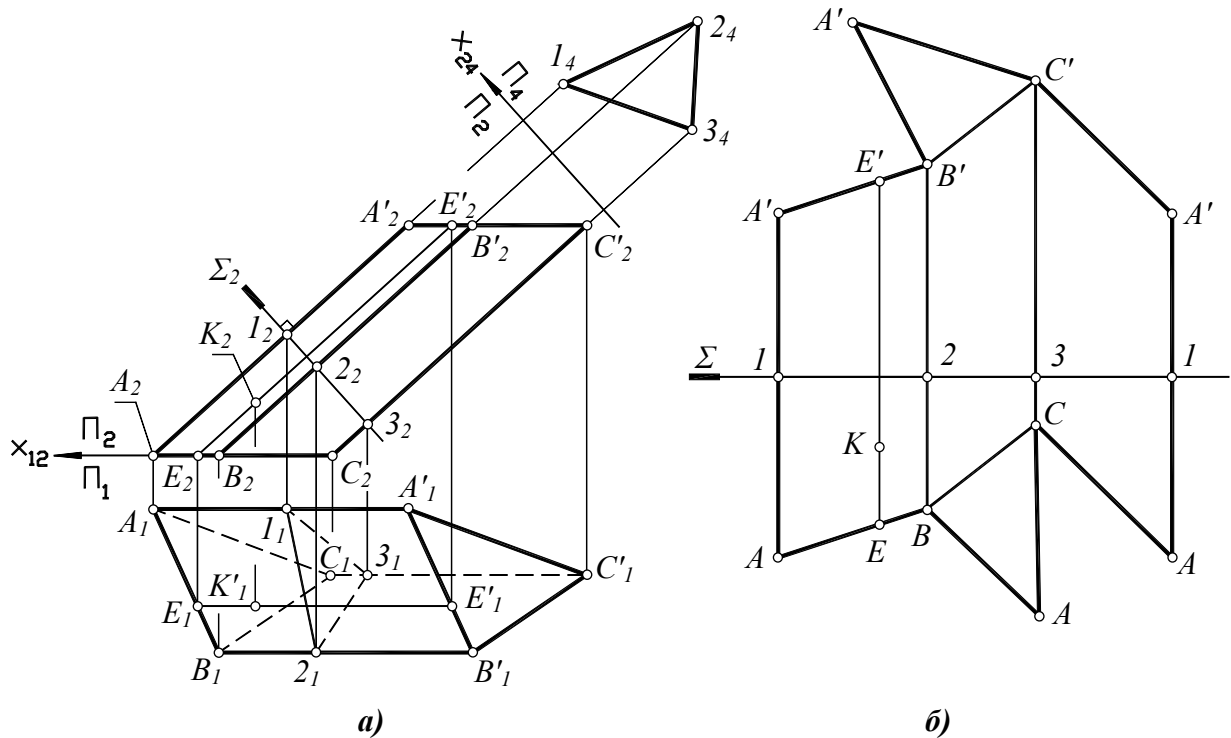


Рис. 13.2

Кроме способа нормального сечения, для построения развертки поверхности призмы может быть использован способ раскатки (частный случай способа нормальных сечений) или способ триангуляции, когда каждая грань призмы делится диагональю на два треугольника [6].

13.2. Построение разверток кривых развертывающихся поверхностей

Напомним, что различают точные и приближенные развертки развертывающихся поверхностей. Точная развертка строится графоаналитическим способом по известным размерам поверхности с использованием ее уравнения. Например, точная развертка боковой поверхности прямого кругового цилиндра высотой H и радиусом основания r имеет форму прямоугольника с размерами сторон H и $2\pi r$.

Приближенная развертка строится графическим способом с использованием чертежа поверхности. Чтобы построить приближенную развертку какой-либо развертываемой поверхности, надо ее заменить (аппроксимировать) многогранной поверхностью. Точную развертку этой многогранной поверхности принимают за приближенную развертку данной развертываемой поверхности.

13.2.1. Точная развертка поверхности прямого кругового конуса

Точная развертка поверхности прямого кругового конуса, образующая которого равна l и радиус основания r (рис. 13.3, а), имеет форму кругового сектора с радиусом l и центральным углом $\alpha = 360^\circ r/l$ (рис. 13.3, б).

Задача. На поверхности конуса отмечена точка K . Построить точку K на развертке конуса.

Через точку K на поверхности конуса проведем его образующую $S-3$ (см. рис. 13.3, а). Найдем положение образующей $S-3$ на развертке конуса. Для этого дугу $1-3$ кругового основания конуса заменяем ломаной линией 123 . Участки этой ломаной линии откладываем от точки 1 на развертке конуса (вдоль дуги кругового сектора). Получаем на развертке точку 3 , через которую проходит образующая $S-3$.

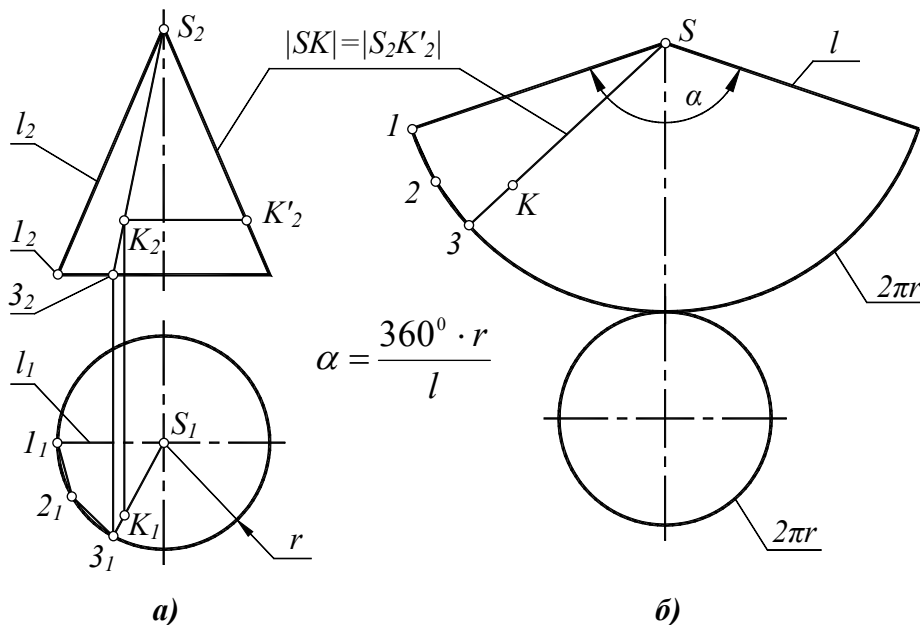


Рис. 13.3

Расстояние SK от вершины S до искомой точки K определено на рис. 13.3, а способом вращения вокруг проецирующей прямой: мысленно вращаем отрезок SK вокруг горизонтально-проецирующей оси конуса (см. п. 5.5). Вращение отрезка заканчивается в тот момент, когда он займет положение фронтали (совместится с фронтальной проекцией очерковой образующей конуса). Фронтальная проекция S_2K_2' повернутого отрезка определяет натуральную величину отрезка SK . Расстояние SK на развертке равно расстоянию S_2K_2' на фронтальной проекции конуса.

Заметим, что построение точки K на развертке выполнено приближенным графическим способом: дуга $1-3$ кругового основания конуса заменена ломаной линией 123 . Хотя развертка конуса была построена точно, но точка K на развертке найдена приближенно, поэтому решение задачи в целом следует считать приближенным.

13.2.2. Точная развертка поверхности усеченного кругового цилиндра

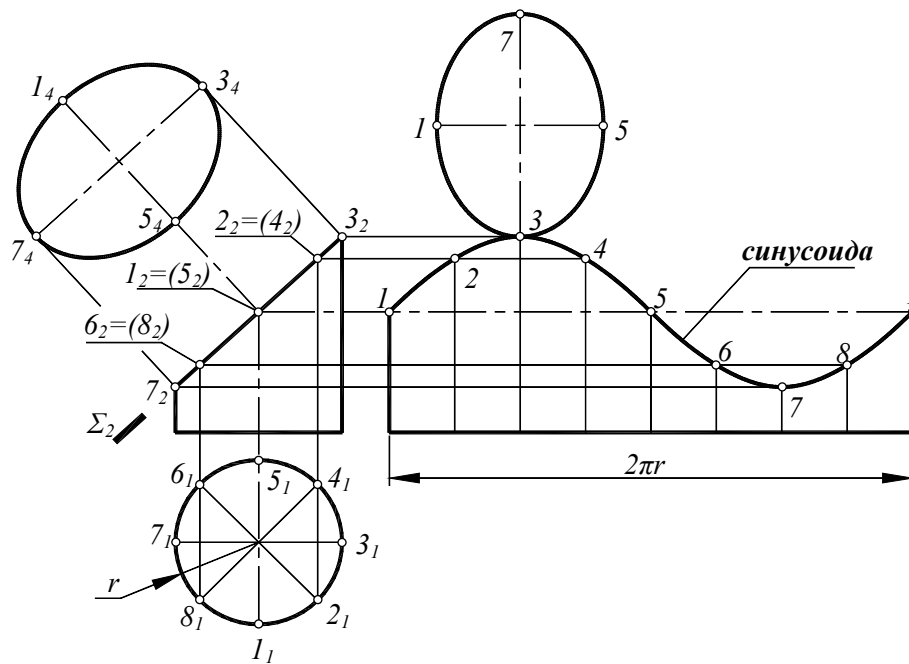


Рис. 13.4

На рис. 13.4 представлена развертка косорассеченного цилиндра. Верхняя часть цилиндра вращения “срезана” наклонной плоскостью Σ . Фигура косоугольного сечения представляет собой эллипс. На развертке цилиндра этот эллипс “переходит” в синусоиду, в чем можно убедиться следующим образом.

Пусть по наклонному сечению цилиндра (эллипсу) движется точка A (рис. 13.5). Координата x_A точки A равна отрезку A_1P_1 и вычисляется по формуле $x_A = r \cdot \sin \varphi$, где r – радиус цилиндра. Высота z_A точки A , отсчитываемая от уровня точки I , определяется формулой $z_A = x_A \cdot \operatorname{tg} \beta$. Подставляя во вторую формулу вместо координаты x_A ее выражение из первой формулы, получаем: $z_A = k \cdot \sin \varphi$, где $k = r \cdot \operatorname{tg} \beta$. Таким образом, высота точки, движущейся по линии наклонного сечения цилиндра, пропорциональна синусу угла поворота φ точки A . При изменении угла φ от 0° до 360° точка A “пробежит” всю линию сечения (эллипс), а на развертке цилиндра получается полная волна синусоиды.

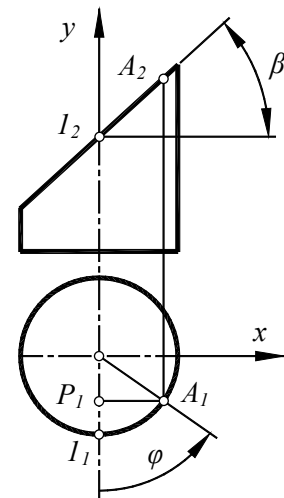


Рис. 13.5

13.2.3. Приближенная развертка поверхности прямого кругового конуса

Напомним, что для построения приближенной развертки развертывающейся поверхности надо ее аппроксимировать (приближенно заменить) многогранной поверхностью. Заменим поверхность конуса поверхностью вписанной в него пирамиды.

На рис. 13.6, а показана правильная 12-угольная пирамида, вписанная в прямой круговой конус. Основание пирамиды – правильный 12-угольник, вписанный в круговое основание конуса. Поверхность конуса приближенно заменена двенадцатью одинаковыми треугольниками (гранями пирамиды, вписанной в конус). Это геометрическое

действие (аппроксимация криволинейной поверхности сеткой треугольников) называют *триангуляцией*.

Определение. *Триангуляция* – замена (аппроксимация) данной поверхности многогранной поверхностью, состоящей из треугольных граней.

После аппроксимации поверхности конуса поверхностью вписанной в него пирамиды надо построить точную развертку пирамиды. Размеры всех боковых ребер пирамиды равны между собой и равны длине l очерковой образующей конуса.

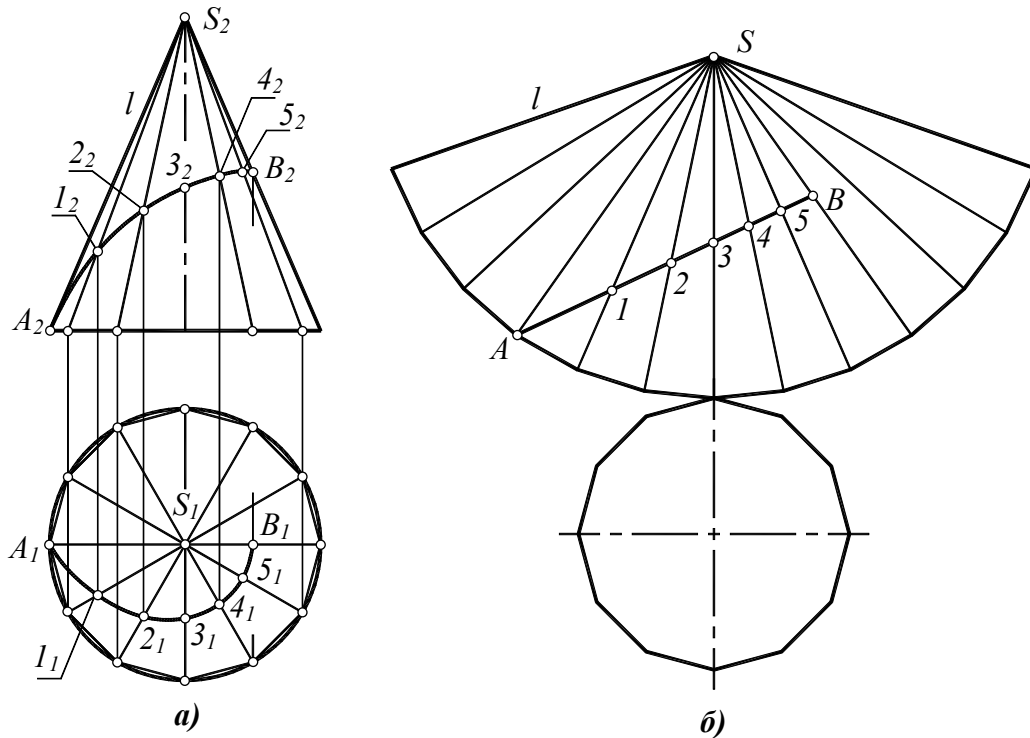


Рис. 13.6

Чтобы построить развертку пирамиды, на свободном месте чертежа произвольно выбираем положение вершины развертки – точку S , и строим 12 одинаковых треугольников с общей вершиной S . Боковые стороны каждого треугольника равны длине l очерковой образующей конуса. Основание каждого треугольника равно длине стороны правильного многоугольника, вписанного в круговое основание конуса. Получаем развертку вписанной в конус пирамиды в виде 12 треугольников со смежными сторонами. Построенная таким образом точная развертка пирамиды принимается за приближенную развертку боковой поверхности конуса. Основание пирамиды (правильный 12-угольник) принимается за развертку основания конуса (рис. 13.6, б).

Отметим на поверхности конуса две точки A и B (см. рис. 13.6, а). Кратчайший путь между двумя точками, проложенный по данной поверхности, называют *геодезической линией*.

Задача. *На поверхности конуса построить кратчайший путь (геодезическую линию) между точками A и B (см. рис. 13.6, а).*

Построение геодезической линии AB на поверхности выполняется с помощью развертки. Прямой линии на развертке соответствует кратчайший путь на поверхности (почему?). Переносим точки A, B с чертежа конуса на развертку и соединяем A и B отрезком прямой (см. рис. 13.6, б). Затем на отрезке AB отмечаем промежуточные точки $1, 2, \dots, 5$ и “возвращаем” эти точки на чертеж конуса.

Соединяя плавной кривой фронтальные проекции точек $A, 1, 2, 3, 4, 5, B$, получаем фронтальную проекцию геодезической линии AB . Соединяя плавной кривой горизон-

тальные проекции точек $A, 1, 2, 3, 4, 5, B$, получаем горизонтальную проекцию геодезической линии AB . Задача решена приближенно, так как для решения использована приближенная развертка конической поверхности.

13.2.4. Приближенная развертка поверхности наклонного конуса

На рис. 13.7 построена приближенная развертка поверхности наклонного конуса с круговым основанием. Для построения приближенной развертки поверхность конуса заменена поверхностью вписанной в него двенадцатиугольной пирамиды.

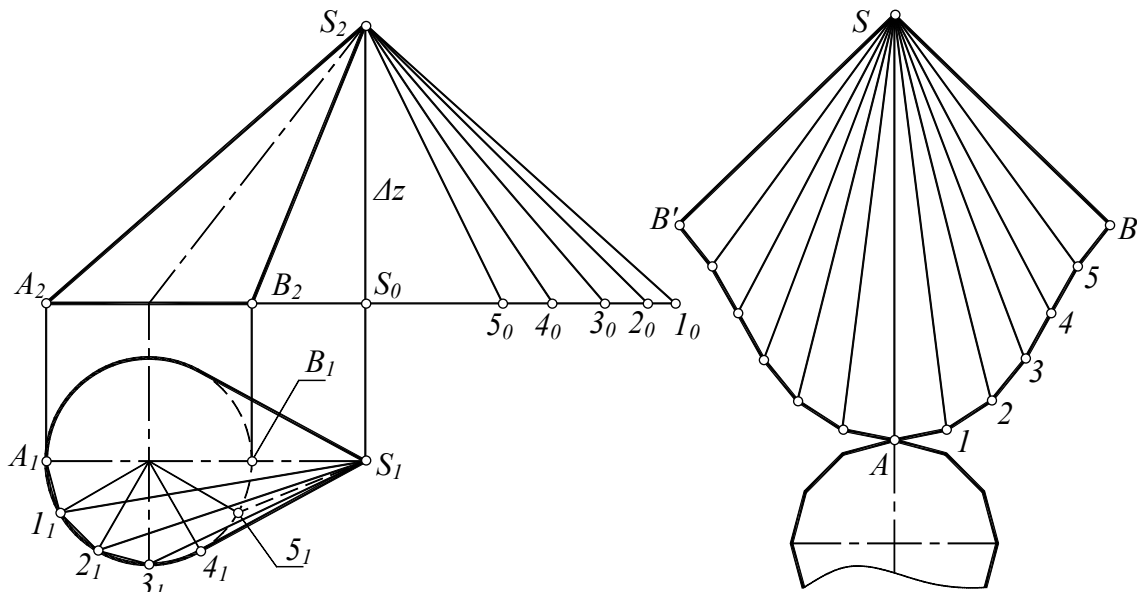


Рис. 13.7

Поверхность конуса имеет плоскость симметрии, поэтому развертка представляет собой симметричную фигуру. В плоскости симметрии лежит самая короткая образующая SB , по которой сделан разрез поверхности. Самая длинная образующая SA , также лежащая в плоскости симметрии, является осью симметрии развертки поверхности.

Натуральные величины образующих определены способом вспомогательного прямоугольного треугольника. Например, истинная длина образующей $S-1$ найдена как гипотенуза S_2l_0 прямоугольного треугольника $S_2S_0l_0$. Один катет этого треугольника – разность высот Δz концов образующей (эта величина одинакова для всех образующих конуса). Другой катет S_0l_0 равен длине S_1l_1 горизонтальной проекции образующей.

От оси симметрии SA строим примыкающие друг к другу треугольники – шесть треугольников в одну сторону и шесть в другую. Все треугольники имеют общую вершину S . Каждый из треугольников строится по трем сторонам. Боковые стороны каждого треугольника равны истинным величинам ребер вписанной в конус пирамиды, а основание треугольника равно длине стороны многоугольника, вписанного в круговое основание конуса.

13.2.5. Приближенная развертка поверхности усеченного конуса

Дан усеченный конус с круговым основанием, наклонной осью и плоскостью симметрии $\Phi \parallel \Pi_2$ (рис. 13.8, а). Вписываем в конус 8-угольную усеченную пирамиду, вершина которой совпадает с вершиной S усеченного конуса (рис. 13.8, б). Точную развертку поверхности вписанной усеченной пирамиды будем считать приближенной разверткой усеченного конуса.

Размеры боковых ребер пирамиды от вершины S до основания определены способом вспомогательного прямоугольного треугольника (см. рис. 13.8, б). Например, длина ребра $S-I$ найдена как гипотенуза S_2I_0 прямоугольного треугольника $S_2B_2I_0$. Катет S_2B_2 этого треугольника – разность высот концов ребер, одинаковая для всех ребер пирамиды. Другой катет B_2I_0 равен длине S_1I_1 горизонтальной проекции ребра $S-I$.

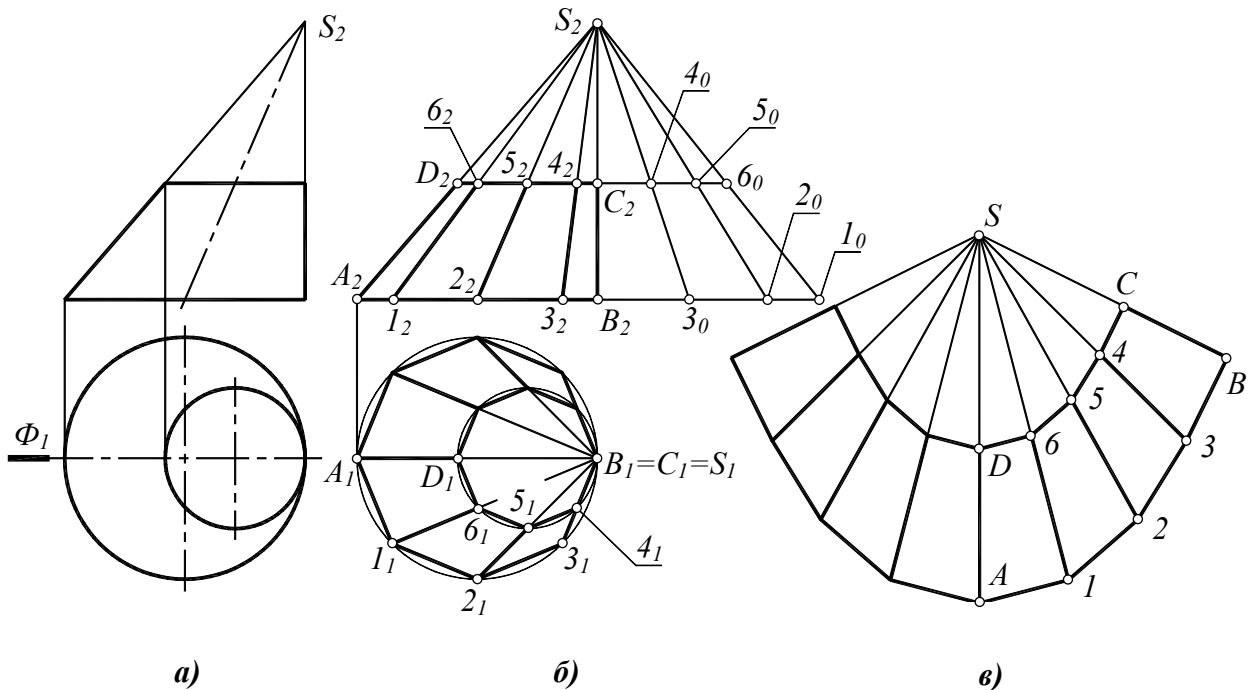


Рис. 13.8

Считая, что пирамида не усечена, построим ее развертку. Развертка каждой грани представляет собой треугольник, боковые стороны которого равны длинам соответствующих ребер неусеченной пирамиды (они определены на рис. 13.8, б), а длина основания равна длине стороны 8-угольника, вписанного в круговое основание конуса. Развертка поверхности неусеченной пирамиды представляет собой 8 примыкающих друг к другу треугольников с общей вершиной S (рис. 13.8, в).

Пирамида усечена плоскостью, параллельной ее основанию, поэтому истинная форма каждой грани усеченной пирамиды – трапеция. Развертка поверхности усеченной пирамиды представляет собой примыкающие друг к другу трапеции. Отложим на развертке неусеченной пирамиды истинную длину какого-нибудь ребра усеченной пирамиды (например, длину ребра BC , изображенного на P_2 в натуральную величину). Через точку C на развертке проводим отрезок $C-4$, параллельный отрезку $B-3$. Затем из точки 4 проводим отрезок $4-5$, параллельный отрезку $3-2$. Продолжая построение, получаем развертку усеченной пирамиды в виде набора из восьми примыкающих друг к другу трапеций (см. рис. 13.8, в).

Развертки нижнего и верхнего оснований усеченной пирамиды (не показанные на чертеже), имеют форму правильных 8-угольников, вписанных в нижнее и верхнее круговые основания данного усеченного конуса.

13.2.6. Приближенная развертка поверхности наклонного цилиндра

Дан наклонный цилиндр с круговым основанием (рис. 13.9, а). Вписываем в цилиндр 8-угольную наклонную призму (рис. 13.9, б). Точную развертку поверхности призмы будем считать приближенной разверткой поверхности наклонного цилиндра.

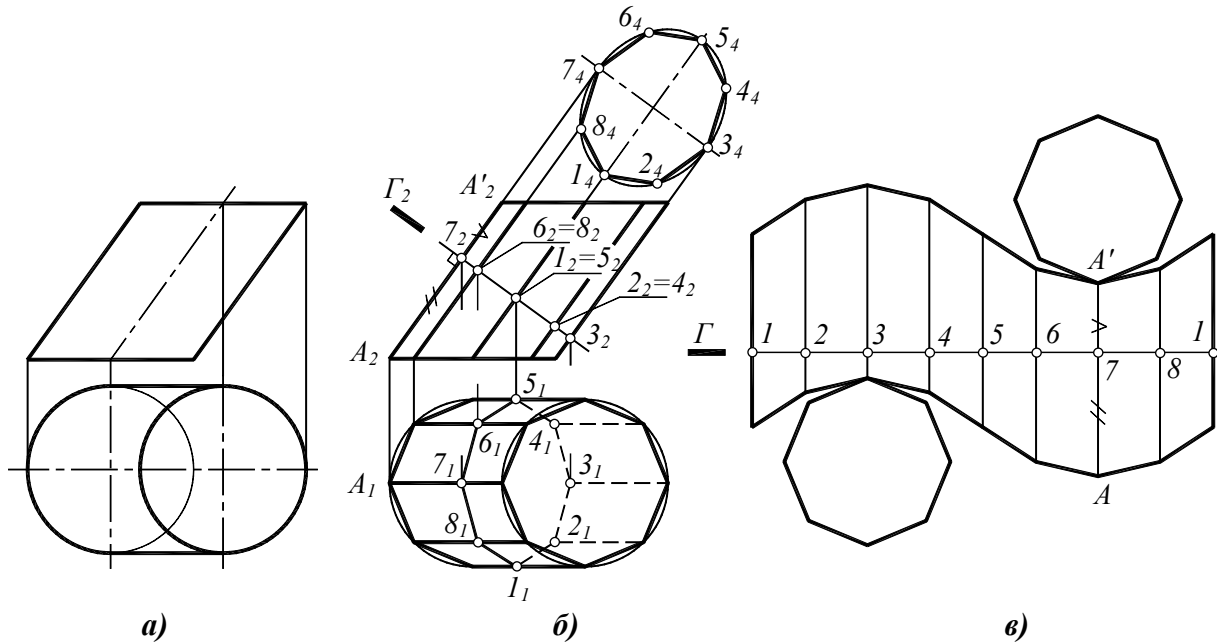


Рис. 13.9

Развертку боковой поверхности призмы получают способом нормального сечения, в соответствии с которым боковую поверхность призмы рассекают фронтально-проецирующей плоскостью Γ , перпендикулярной ее боковым ребрам (см. п. 13.1.2). Истинная форма нормального сечения призмы $1_4 2_4 \dots 8_4$ определена способом замены плоскостей проекций. Нормальное сечение $1_4 2_4 \dots 8_4$ “разворачиваем” в прямую $1-2-\dots-8-1$ и через каждую точку проводим прямую, перпендикулярную линии нормального сечения (рис. 13.9, в). На каждом из построенных перпендикуляров откладываем отрезки боковых ребер, измеренные на Π_2 до и после нормального сечения. Например, отрезки $A-7$ и $A'-7$ на развертке равны отрезкам $A_2 7_2$ и $A'_2 7_2$ на плоскости Π_2 . Концы отрезков соединяем ломаными линиями. К развертке боковой поверхности призмы добавляем ее основания – два многоугольника (см. рис. 13.9, в).

13.3. Построение условных разверток неразвертывающихся поверхностей

Многие сооружения часто ограничены неразвертывающимися поверхностями. Между тем условия их постройки заставляют изготавливать эти поверхности из листового материала. Поэтому составление условных разверток неразвертывающихся поверхностей представляет собой важную техническую задачу. Например, поверхность корпуса морского судна состоит из отсеков криволинейных поверхностей, которые выкраивают из металлических листов, а затем склепывают друг с другом. Образуется кривая (а в сущности – многогранная) поверхность корпуса.

Пусть требуется построить условную развертку некоторой неразвертывающейся поверхности Φ . Разбиваем поверхность Φ на отдельные участки (отсеки). Каждый отсек аппроксимируем (приближенно заменяем) отсеком какой-либо развертывающейся поверхности – многогранником, цилиндром или конусом (в зависимости от формы

данной поверхности Φ). В результате вместо исходной неразвертывающейся поверхности получаем поверхность Φ' , состоящую из участков развертывающихся поверхностей. Выполняем построение разверток всех участков составной поверхности Φ' . Совокупность полученных разверток принимаем за условную развертку поверхности Φ .

13.3.1. Построение условных разверток способом триангуляции

Напомним, что триангуляцией называют замену (аппроксимацию) данной поверхности многогранной поверхностью, состоящей из треугольных граней. Произвольная неразвертывающаяся поверхность Φ может быть аппроксимирована многогранной поверхностью Φ' с треугольными гранями. Развертка полученной многогранной поверхности Φ' принимается за условную развертку данной поверхности Φ .

Пусть требуется построить условную развертку косоугольной плоскости, “натянутой” на пространственный (неплоский) четырехугольник $ABCD$ (рис. 13.10). Косая плоскость (гиперболический параболоид) – неразвертывающаяся поверхность, образованная прямолинейной образующей, движущейся параллельно заданной плоскости параллелизма и пересекающей прямолинейные направляющие (см. п. 6.2.4). В рассматриваемом примере направляющие прямые – скрещивающиеся стороны AD и BC четырехугольника $ABCD$, а плоскость Π_1 – плоскость параллелизма. Горизонтальная образующая скользит по направляющим AD и BC , последовательно занимая положения AB , $1-1'$, $2-2'$, DC .

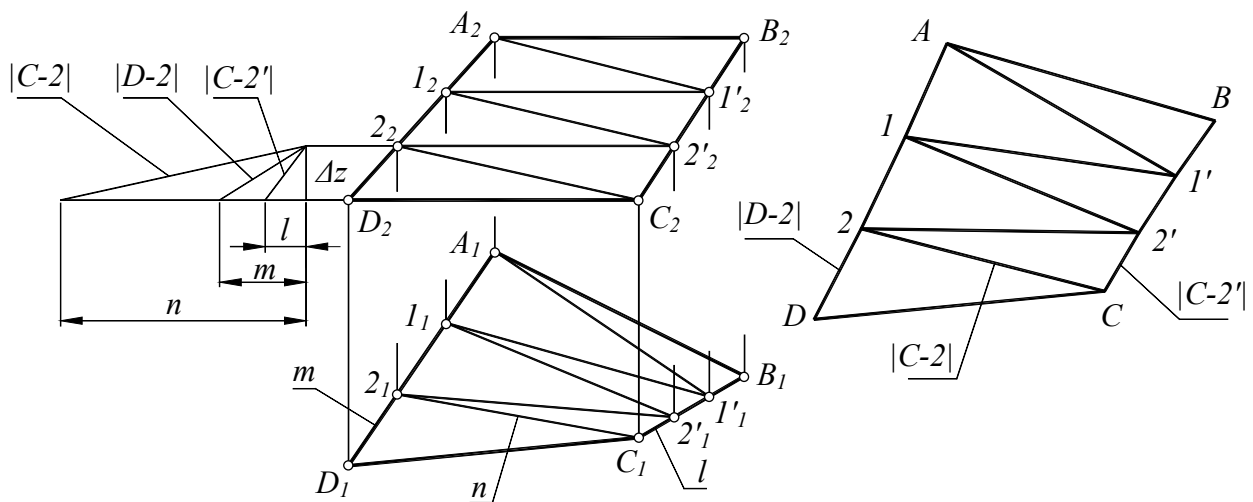


Рис. 13.10

Чтобы выполнить триангуляцию, предварительно разбиваем отсек $ABCD$ косоугольной плоскости на части с помощью образующих. Для упрощения построений поверхность разбита образующими AB , $1-1'$, $2-2'$, DC только на три части, каждая из которых ограничена пространственным четырехугольником.

Проводя диагонали полученных неплоских четырехугольников, заменяем каждую часть поверхности двумя треугольниками. Например, нижний участок, ограниченный пространственным четырехугольником $D-2-2'-C$, заменен двумя треугольниками $D2C$ и $C22'$. В результате заданный отсек $ABCD$ косоугольной плоскости заменен (аппроксимирован) многогранной поверхностью, состоящей из шести треугольников. При увеличении числа разбиений точность аппроксимации возрастает.

Для построения развертки полученной шестигранной поверхности надо определить истинные размеры сторон ее треугольных граней. На рис. 13.10 показано определение (способом прямоугольного треугольника) истинной величины отрезков $D-2$, $C-2'$ и $C-2$. Для определения $|D-2|$ построен вспомогательный прямоугольный треугольник с кате-

тами Δz и m , где Δz – разность высот концов отрезка $D-2$, а $m=D_1 2_1$ – длина его горизонтальной проекции. Для определения $|C-2'|$ построен прямоугольный треугольник с катетами Δz и l , где $l=C_1 2'_1$. Для определения $|C-2|$ построен прямоугольный треугольник с катетами Δz и n , где $n=C_1 2_1$. Гипотенузы вспомогательных прямоугольных треугольников равны истинным величинам соответствующих отрезков.

Истинные размеры остальных ребер аппроксимирующей многогранной поверхности определяются аналогично (с учетом того, что горизонтальные отрезки AB , $1-1'$, $2-2'$, DC изображаются на Π_1 в натуральную величину). После определения истинных размеров всех ребер выполняем построение развертки, состоящей из примыкающих друг к другу треугольников. Каждый из треугольников строится “по трем сторонам”. Полученную точную развертку многогранной поверхности, состоящей из треугольных граней, принимаем за условную развертку исходной неразвертывающейся поверхности.

Примечание. Практически вся земная поверхность “покрыта” триангуляционной сетью опорных геодезических пунктов с таким расчетом, чтобы они являлись вершинами треугольников, по возможности близких к равносторонним. В результате истинная поверхность земли аппроксимируется сетью треугольников (с размерами сторон на территории России 4...25 км). Геодезические пункты отмечаются заложенными в землю бетонными пилонами, над которыми сооружаются вышки. Координаты каждого геодезического пункта (широта, долгота, высота над уровнем моря) определены с большой точностью. Сеть геодезических пунктов используется как для геодезических работ, так и в системах глобального позиционирования (GPS, ГЛОНАСС).

13.3.2. Построение условных разверток поверхностей вращения

Для построения условных разверток неразвертывающихся поверхностей вращения за аппроксимирующие поверхности принимают цилиндры и конусы. В соответствии с этим различают два способа построения условных разверток поверхностей вращения: *способ цилиндров* и *способ конусов*.

Пусть требуется построить условную развертку поверхности вращения (рис. 13.11). При построении условной развертки *способом цилиндров* данная поверхность мысленно разрезается меридиональными плоскостями Γ , Γ' ,... (то есть плоскостями, проходящими через ее ось вращения), на несколько равных частей (рис. 13.12, а). Каждая часть заменяется отрезком цилиндрической поверхности Φ , которая касается заданной поверхности вдоль ее меридиана m . В результате поверхность вращения приближенно заменяется (аппроксимируется) составной поверхностью, состоящей из одинаковых цилиндрических “лепестков” Φ с горизонтальными образующими.

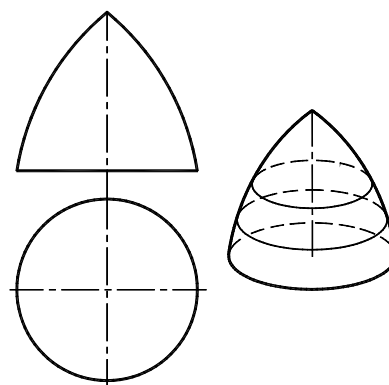


Рис. 13.11

Каждый лепесток можно приближенно развернуть на плоскость. Совокупность разверток всех лепестков составляет условную развертку поверхности вращения.

При построении условной развертки поверхности вращения *способом конусов* данная поверхность, как и при использовании способа цилиндров, мысленно разрезается на несколько частей. Но секущие плоскости Σ , Σ' ,... проводят не через ось вращения, а перпендикулярно ей. Вся поверхность делится секущими плоскостями на несколько горизонтальных “поясков” (рис. 13.12, б). Каждый поясик заменяется отрезком конической поверхности Θ . В результате заданная поверхность вращения приближенно заменяется (аппроксимируется) составной поверхностью, состоящей из разных конических поясков Θ , стыкующихся между собой по параллелям данной поверхности вращения.

Каждый конический пояс, представляющий собой поверхность усеченного кругового конуса, можно развернуть на плоскость. Совокупность разверток всех поясков составляет условную развертку поверхности.

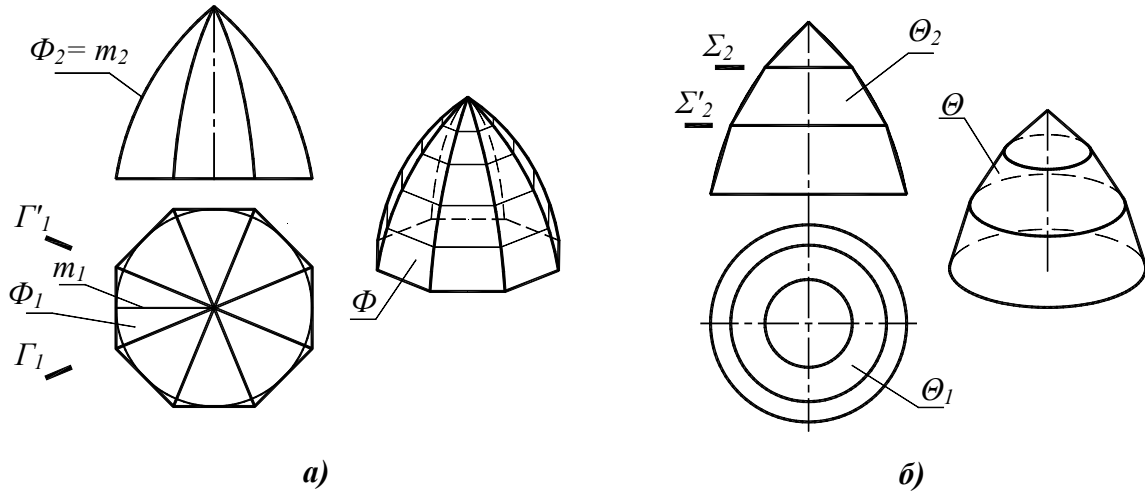


Рис. 13.12

Рассмотрим конструктивное построение условной развертки неразвертывающейся поверхности вращения способом цилиндров и способом конусов.

13.3.2.1. Способ цилиндров

Данную поверхность вращения мысленно разрезаем меридиональными плоскостями Γ, Γ', \dots на равные участки (рис. 13.13, а). Развертки одинаковых участков поверхно-

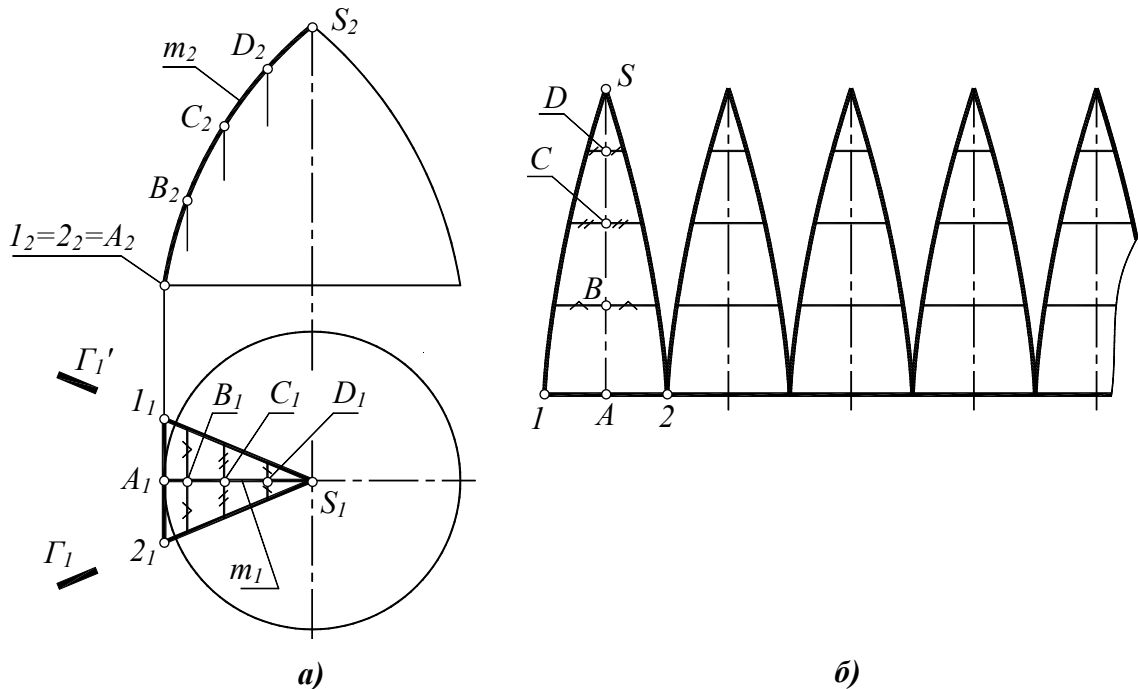


Рис. 13.13

сти одинаковы, поэтому достаточно построить условную развертку лишь одного участка. На рис. 13.13, а поверхность разрезана на 8 участков. Показан только один участок, выделенный плоскостями Γ, Γ' . Отмечен средний меридиан $m=AS$ этого участка.

Заменяем выделенный участок поверхности вращения участком (отсеком) Φ цилиндрической поверхности, касающейся заменяемого участка вдоль среднего меридиана m . Меридиан m расположен во фронтальной плоскости уровня, поэтому дуга AS меридиана m изображается на Π_2 в натуральную величину.

Цилиндрический отсек Φ , как и выделенный участок поверхности вращения, ограничен плоскостями Γ, Γ' . Поверхность отсека Φ занимает фронтально-проецирующее положение, поэтому его фронтальная проекция совпадает на чертеже с фронтальной проекцией m_2 меридиана m . Горизонтальная проекция отсека Φ – треугольник $1_1 2_1 S_1$.

Таким образом, участок исходной поверхности вращения, ограниченный плоскостями Γ, Γ' , приближенно заменяется (аппроксимируется) отсеком Φ цилиндрической поверхности, ограниченным теми же плоскостями Γ, Γ' . Направляющая линия поверхности Φ – меридиан m , являющийся одновременно нормальным сечением цилиндра Φ ; образующие цилиндра Φ горизонтальны (см. рис. 13.13, а).

Для приближенного построения развертки отсека Φ заменяем направляющую $m=AS$ ломаной линией $ABCDS$, фронтальная проекция $A_2 B_2 C_2 D_2 S_2$ которой указывает истинную длину всех ее звеньев. В соответствии со способом нормального сечения, спрямляем ломаную линию $A_2 B_2 C_2 D_2 S_2$ в отрезок $ABCDS$, начерченный на свободном месте чертежа (рис. 13.13, б). Через точки A, B, C, D проводим прямые, перпендикулярные AS , на которых откладываем отрезки касательных, проведенных к соответствующим параллелям. Эти отрезки ограничены плоскостями Γ, Γ' . Например, через точку A проведен отрезок $1-2$ касательной к круговому основанию данного тела вращения, ограниченный плоскостями Γ, Γ' .

Соединяя концы отрезков касательных плавной кривой, получаем приближенную развертку одного цилиндрического “лепестка” $1-2-S$. Полная условная развертка данной поверхности вращения состоит из восьми таких лепестков (см. рис. 13.13, б). Точность построения условной развертки увеличивается с увеличением числа участков, на которые разделена данная поверхность.

13.3.2.2. Способ конусов

Данную поверхность вращения мысленно разрезаем плоскостями, перпендикулярными ее оси, на несколько частей – “поясков”. Для упрощения построений поверхность разрезана плоскостями Δ, Δ' всего на три части (рис. 13.14, а). Меридиан AS данной поверхности вращения заменяем ломаной линией $ABCS$, что позволяет аппроксимировать “пояски” отсеками конических поверхностей вращения, образующие которых совпадают со звеньями ломаной линии $ABCS$. Верхний участок поверхности (от вершины S до параллели c) заменен конической поверхностью с вершиной S и образующей CS . Средний участок (между параллелями b и c) заменен отсеком поверхности усеченного конуса с образующей BC и вершиной S' . Нижний участок (от основания a до параллели b) заменяется отсеком поверхности усеченного конуса с образующей AB и вершиной S'' . Все отсеки конических поверхностей имеют общую ось вращения, совпадающую с осью данной поверхности.

После аппроксимации данной поверхности вращения тремя отсеками конических поверхностей построение условной развертки сводится к построению разверток поверхностей трех конусов. Построение этих разверток, показанное на рис. 13.14, б, выполняется точно (см. п. 13.2.1). Например, развертка нижнего отсека конической поверхности (с направляющей a , образующей AB и вершиной S'') представляет собой часть сектора, ограниченного двумя концентрическими дугами окружностей с радиусами $|AS''|$ и $|BS''|$. Центральный угол сектора вычисляется по формуле $\alpha = 360^\circ r/l$, где $l = |AS''|$, r – радиус параллели a .

Длины дуг окружностей, соприкасающихся в точках B, C , равны между собой, так как они соответствуют параллелям b, c данной поверхности.

Совокупность разверток отсеков конических поверхностей, показанная на рис. 13.14, б, принимается за условную развертку данной неразвертываемой поверхности вращения. Точность построения условной развертки увеличивается с увеличением числа участков, на которые разделена данная поверхность.

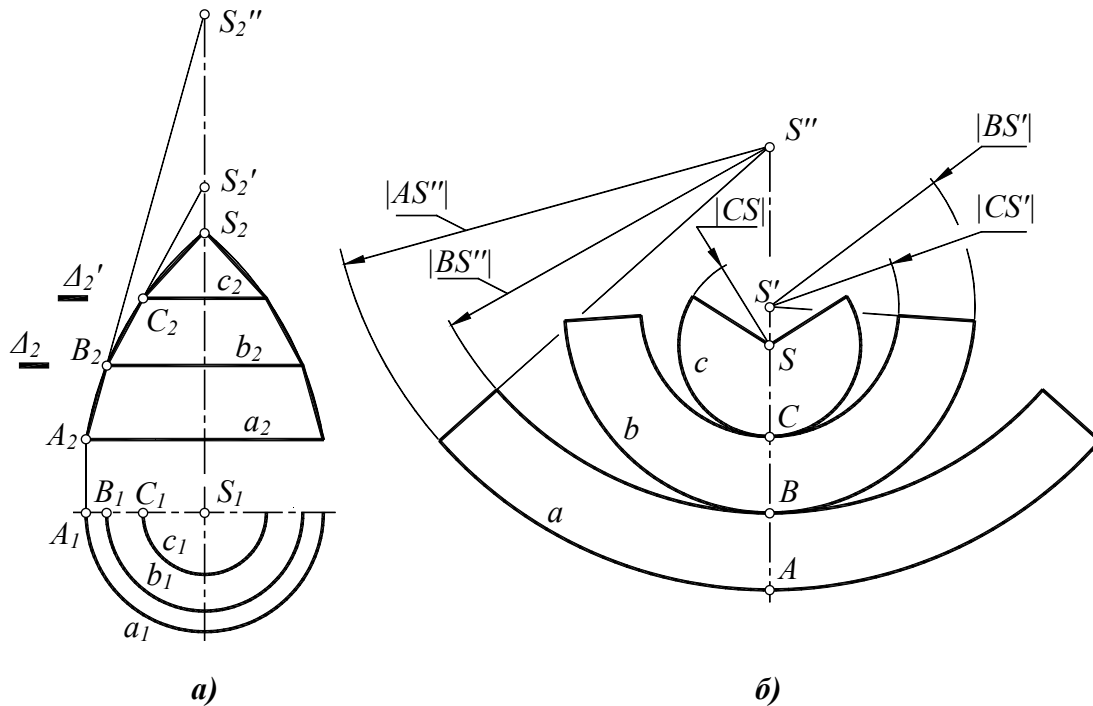


Рис. 13.14

Вопросы для повторения

1. Какие поверхности называют развертываемыми? Что называют разверткой поверхности?
2. Какие поверхности являются развертываемыми?
3. Какие свойства развертываемой поверхности сохраняются на ее развертке?
4. Какая развертка называется точной и какая – приближенной? Для каких поверхностей составляют условные развертки?
5. Что представляют собой развертки боковых поверхностей: а) прямой призмы; б) прямого кругового цилиндра; в) прямого кругового конуса?
6. Что называют геодезической линией на поверхности? Каким способом построить геодезическую линию между указанными на чертеже точками развертываемой поверхности?
7. В чем заключается способ триангуляции?
8. Какими способами может быть построена условная развертка неразвертываемой поверхности вращения?