# Лекция 9

## ПОСТРОЕНИЕ ЛИНИИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ (СПОСОБ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ СФЕР)

В начертательной геометрии точки, принадлежащие линии пересечения двух поверхностей, находят с помощью *способа вспомогательных секущих поверхностей.* На выбор секущей поверхности накладывается требование: проекции линии пересечения вспомогательной поверхности с заданными поверхностями должны быть графически простыми линиями – прямыми или окружностями.

Чаще всего в качестве вспомогательной секущей поверхности используют *плоскость*. Но в некоторых случаях в качестве вспомогательной секущей поверхности может быть использована *сфера*.

Применение сфер основано на следующем свойстве поверхностей вращения: *соосные поверхности вращения пересекаются по окружности* (соосными называют поверхности вращения, имеющие общую ось). Например, соосные конус вращения и круговой цилиндр пересекаются по окружности (рис. 9.1).

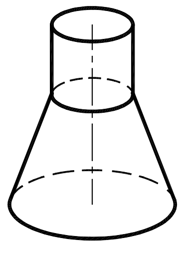
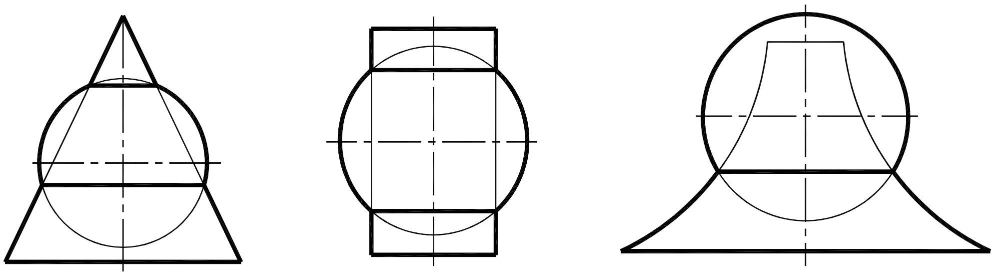


**Рис. 9.1**

В частности, всякая сфера, центр которой находится на оси какой-нибудь поверхности вращения, пересекается с этой поверхностью по одной или нескольким окружностям.



***а)*** ***б)*** ***в)***

**Рис. 9.2**

**Примеры.** Соосные сфера и конус вращения (рис. 9.2, *а*) пересекаются по двум окружностям разного диаметра. Цилиндр вращения и сфера с центром на оси цилиндра (рис. 9.2, *б*) пересекаются по двум одинаковым окружностям. Поверхность вращения и сфера (рис. 9.2, *в*), пересекаются по окружности.

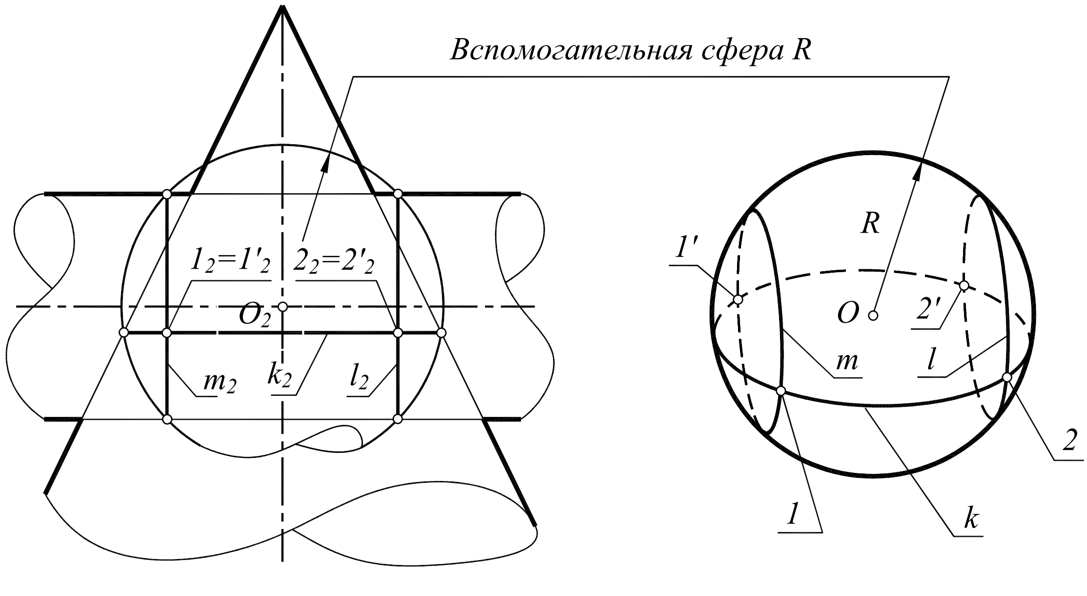
Различают способ вспомогательных *концентрических* сфер и способ вспомогательных *эксцентрических* сфер. Концентрическими называют сферы с общим центром. Если центры сфер не совпадают, то такие сферы называют эксцентрическими.

### 9.1. Способ концентрических сфер

*Способ концентрических сфер применяется для построения линии пересечения поверхностей вращения с пересекающимися осями и общей плоскостью симметрии, параллельной одной из плоскостей проекций. Точка пересечения осей – общий центр всех вспомогательных сфер.*

Рассмотрим сущность способа концентрических сфер на примере построения линии пересечения кругового конуса и цилиндра вращения (рис. 9.3, *а*). Пересекающиеся оси поверхностей лежат в их общей плоскости симметрии, параллельной фронтальной плоскости проекций.

Проведем сферу произвольного радиуса $R$ с центром $O$ в точке пересечения осей конуса и цилиндра. Эта сфера пересечет конус по окружности $k$, а цилиндр – по окружностям $m$, $l$. На фронтальной плоскости проекций эти окружности изображаются отрезками $k_2$, $m_2$ и $l_2$ (см. рис. 9.3, *а*).




***а)*** ***б)***

**Рис. 9.3**

Окружности $m$, $l$ пересекаются с окружностью $k$, так как находятся на одной и той же сфере $R$ (рис. 9.3, *б*). Точки пересечения *1*, *1'* и *2*, *2'* этих окружностей принадлежат линии пересечения заданных поверхностей.

Запишем схему решения второй позиционной задачи с использованием вспомогательных секущих сфер.

1. Проводим вспомогательную сферу $R$, пересекающую заданные поверхности вращения (см. рис. 9.3, *а*).

2. Находим линии пересечения заданных поверхностей и вспомогательной сферы $R$ (окружности $k$, $m$, $l$ на рис. 9.3, *а*, *б*).

3. Отмечаем общие точки *1, 1'* и *2, 2'* окружностей $k$, $m$, $l$. Эти точки принадлежат как поверхности конуса, так и поверхности цилиндра, следовательно, находятся на линии пересечения этих поверхностей.

Многократное повторение рассмотренной схемы с использованием вспомогательных концентрических сфер разного радиуса позволяет определить достаточное количество точек, через которые проходит искомая линия пересечения поверхностей.

Вспомогательная сфера должна пересекать обе заданные поверхности, поэтому нет смысла использовать сферу, которая не пересекает какую-либо из данных поверхностей. На рис. 9.4 показана сфера $R_{min}$, вписанная в конус. Сфера с радиусом меньше, чем $R_{min}$, не пересечется с конусом. Сфера $R_{min}$ – вспомогательная сфера минимального радиуса.

**Правило**. *Минимальный радиус $R_{min}$ вспомогательной сферы определяется как радиус наибольшей из сфер, вписанных в заданные поверхности.*

В рассматриваемом примере минимальная сфера касается конуса по окружности $t$ и пересекается с цилиндром по окружностям $a$, $b$ (на рис. 9.4 эти окружности изображаются отрезками $t_2$, $a_2$, $b_2$). Окружности *t, a, b* пересекаются в четырех точках $K$, $K'$, $L$, $L'$, лежащих на линии пересечения поверхностей конуса и цилиндра.

Кроме “минимальной” вспомогательной сферы, существует и “максимальная” вспомогательная сфера. На рис. 9.4 показана сфера с радиусом $R_{max}$, пересекающая конус по окружности $e$, а цилиндр – по окружностям $c$ и $d$ (отрезки $e_2$, $c_2$, $d_2$ на рис. 9.4). Эти окружности имеют две общие точки $A$ и $B$. Сфера с радиусом больше, чем $R_{max}$, “разрезает” заданные поверхности по окружностям, вообще не пересекающимся между собой. Сфера $R_{max}$ – вспомогательная сфера максимального радиуса.

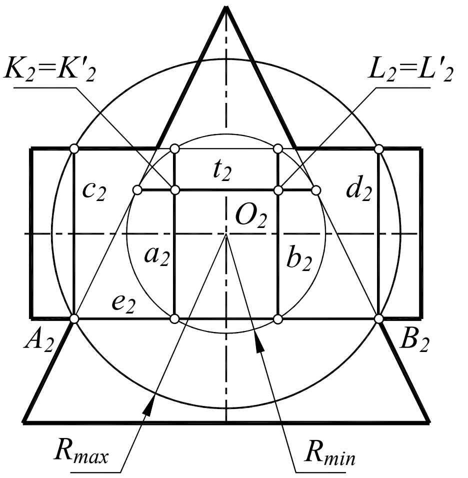



**Рис. 9.4**

**Правило.** *Максимальный радиус $R_{max}$ вспомогательной сферы определяется как расстояние от проекции центра сферы до наиболее удаленной точки пересечения очерковых линий.*

Линия пересечения поверхностей конуса и цилиндра показана на рис. 9.5. Очерковые точки $A$, $B$, $C$, $D$ найдены с помощью общей плоскости симметрии $\Sigma$, рассекающей конус и цилиндр по фронтальным очерковым линиям; очерковые линии пересекаются между собой в точках $A$, $B$, $C$, $D$.

Точки $K$, $K'$, $L$, $L'$ определены с помощью “минимальной” сферы $R_{min}$ (см. рис. 9.4). Промежуточные точки *1*, *1'* и *2*, *2'* найдены с помощью вспомогательной секущей сферы $R$ с центром в точке пересечения осей и радиусом $R_{min} \leq R \leq R_{max}$ (см. рис. 9.3). Горизонтальные проекции этих точек построены с помощью линий связи из условия их принадлежности к поверхности вспомогательной сферы $R$ или к одной из данных поверхностей.

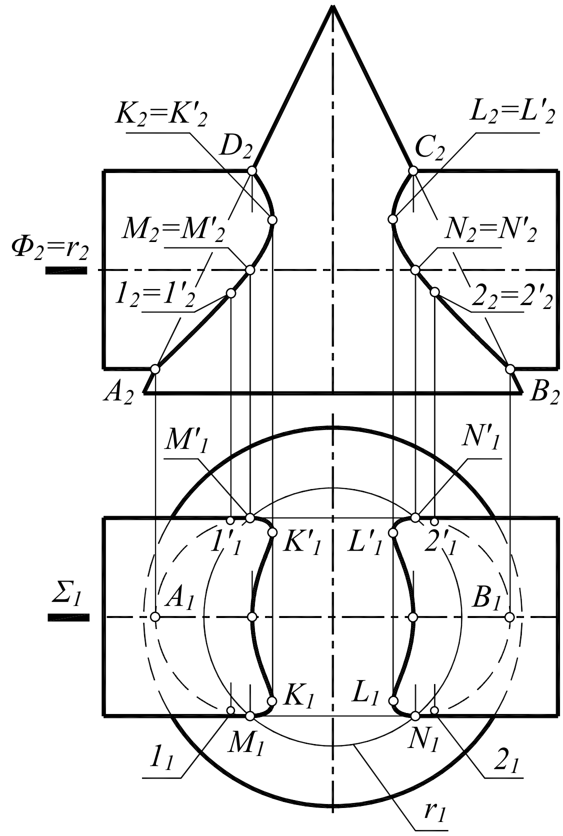



**Рис. 9.5**

Видимость горизонтальной проекции искомой линии пересечения меняется в точках $M$, $M'$, $N$, $N'$, лежащих в плоскости смены видимости $\Phi$. Плоскость $\Phi$ пересекает конус по окружности $r$, а цилиндр по горизонтальному очерку. На пересечении горизонтальной проекции $r_1$ и горизонтального очерка цилиндра отмечены горизонтальные проекции $M_1$, $M'_1$, $N_1$, $N'_1$ точек смены видимости $M$, $M'$, $N$, $N'$. Фронтальные проекции этих точек принадлежат вырожденной фронтальной проекции плоскости $\Phi$ (см. рис. 9.5).

## 9.2. Способ эксцентрических сфер

В некоторых случаях для построения линии пересечения поверхностей может быть использован способ эксцентрических сфер, то есть вспомогательных секущих сфер, имеющих различные центры.

*Способ эксцентрических сфер применяют для построения линии пересечения поверхностей, имеющих круговые сечения, со скрещивающимися или пересекающимися осями и общей плоскостью симметрии, параллельной одной из плоскостей проекций.*

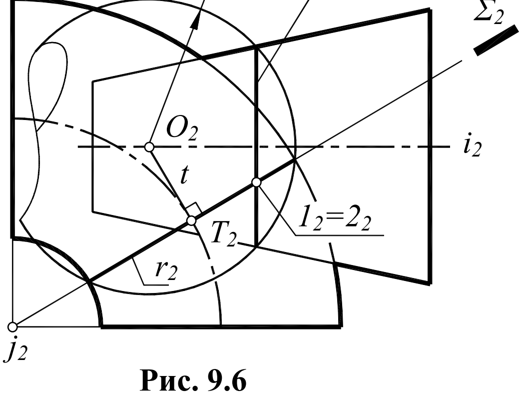



**Рис. 9.6**

Сущность способа состоит в том, что выбирается сфера, пересекающая данные поверхности по окружностям. Эти окружности пересекаются между собой в точках, лежащих на искомой линии пересечения поверхностей.

Пусть дан усеченный круговой конус с горизонтальной осью $i$ и четверть открытого тора с горизонтальной осью $j$ (рис. 9.6). Поверхности имеют общую плоскость симметрии, параллельную фронтальной плоскости проекций. Оси $i$, $j$ поверхностей не пересекаются (скрещиваются).

Займемся поиском вспомогательной сферы, которая пересекает конус и тор по окружностям. Ее центр должен находиться на оси конуса. Проведем через ось $j$ тора произвольную плоскость $\Sigma$, которая пересечет тор по окружности $r$. Из центра $T$ окружности $r$ проведем перпендикуляр $t$ к плоскости $\Sigma$ до пересечения в точке $O$ с осью $i$ конуса. Введем в рассмотрение вспомогательную сферу $\Theta$ с центром в точке $O$. Радиус этой сферы выбирается таким образом, чтобы она прошла через окружность $r$ на поверхности тора.

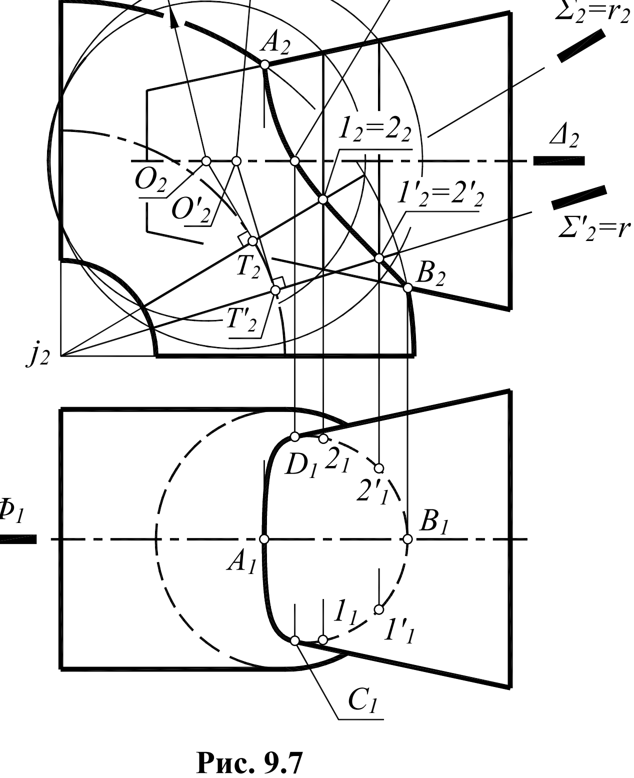



**Рис. 9.7**

Вспомогательная сфера $\Theta$ пересекается с тором по окружности $r$, а с конусом – по окружности $k$. На пересечении проекций $r_2$ и $k_2$ этих окружностей отмечаем точки $1_2=2_2$. Точки $1$ и $2$ находятся как на торе, так и на конусе, следовательно, они принадлежат линии их пересечения (см. рис. 9.6).

Чтобы найти дополнительные точки этой линии, надо подобрать другую сферу, также пересекающую данные поверхности по окружностям. Для этого проведем через ось $j$ тора вместо плоскости $\Sigma$ другую плоскость $\Sigma'$, пересекающую тор по окружности $r'$. Начертим сферу $\Theta'$ с центром $O'$ на оси конуса, проходящую через окружность $r'$. На рис. 9.7 показаны соответствующие построения: проведена плоскость $\Sigma'$ и из центра $T'$ кругового сечения $r'$

тора построен перпендикуляр к плоскости $\Sigma'$, пересекающий ось конуса в точке $O'$. Новая вспомогательная сфера $\Theta'$ рассекает тор и конус по окружностям, которые пересекаются между собой в точках *1'* и *2'*, принадлежащих искомой линии пересечения. Горизонтальные проекции точек *1-2*, *1'-2'* определяются из условия их принадлежности к заданным поверхностям (тору или конусу) или к поверхностям вспомогательных секущих сфер *R*, *R'*.

При решении задачи использованы не только вспомогательные сферы, но и вспомогательные секущие плоскости $\Phi$ ($\Phi$ – общая плоскость симметрии данных поверхностей) и $\Delta$ ($\Delta$ – плоскость смены видимости на $\Pi_1$). Плоскость $\Phi$ “разрезает” тор и конус по фронтальным очерковым линиям, которые пересекаются между собой в точках *A* и *B* (см. рис. 9.7). Горизонтальные проекции этих точек принадлежат вырожденной горизонтальной проекции плоскости $\Phi$. В плоскости $\Delta$ находятся точки смены видимости *C*, *D* горизонтальной проекции искомой линии пересечения тора и конуса (эти точки определяются приближенно).

### 9.3. Примеры применения способа сфер

**Задача 1**. *Построить линию пересечения круговых конусов с общей фронтальной плоскостью симметрии* (рис. 9.8).

Даны поверхности вращения с пересекающимися осями и общей плоскостью симметрии $\Phi$, параллельной плоскости $\Pi_2$. Следовательно, в соответствии с п. 9.1, для решения задачи может быть использован способ вспомогательных концентрических сфер. Общая плоскость симметрии $\Phi$ разрезает конусы по фронтальным очерковым линиям, которые пересекаются между собой в точках *A*, *B*, *C*, *D*. Это экстремальные относительно $\Pi_1$ точки искомой линии пересечения.

Плоскость $\Theta$ – плоскость смены видимости на горизонтальной проекции. При взгляде сверху точки, лежащие *выше* плоскости $\Theta$, *видимы*. Точки, расположенные *ниже* плоскости $\Theta$ – *невидимы* (закрыты от наблюдателя верхней частью горизонтального конуса). В плоскости $\Theta$ располагаются точки смены видимости *I-I'* и *J-J'*.

Промежуточные точки искомой линии пересечения определяются с помощью вспомогательных концентрических сфер с

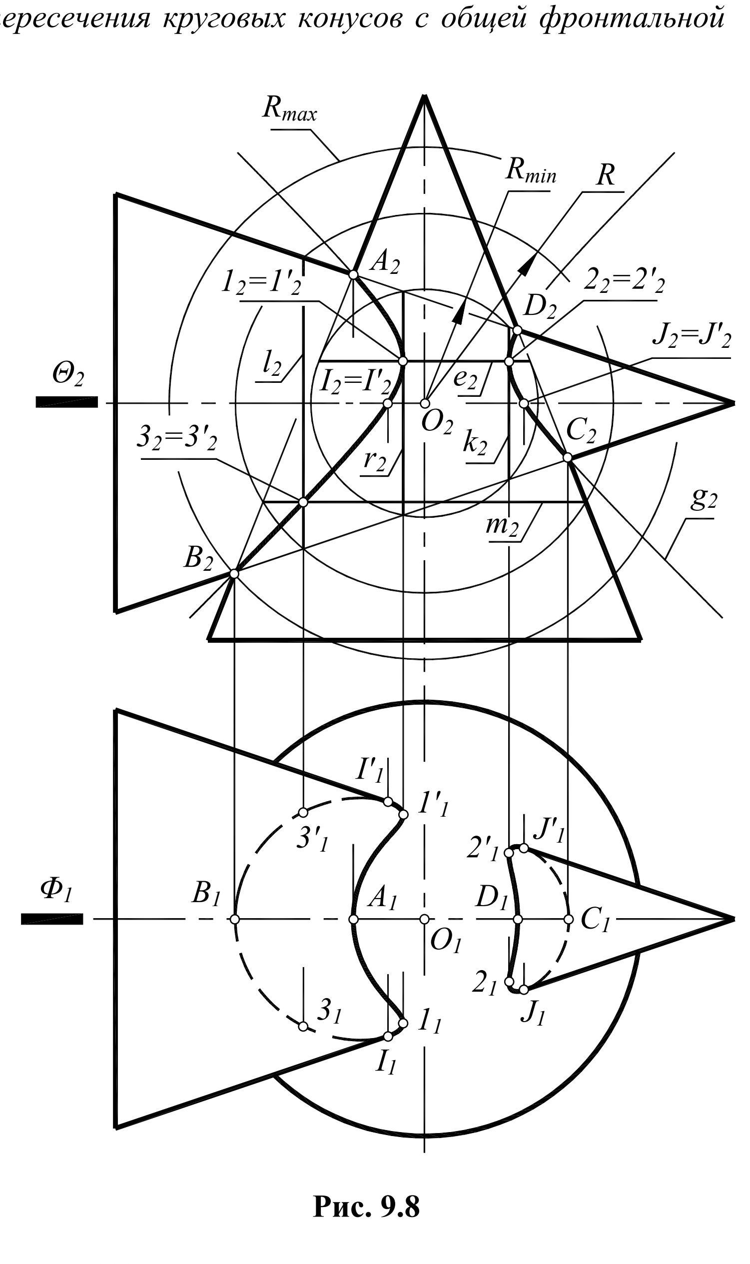



**Рис. 9.8**

центром в точке $O$ пересечения осей конусов. Минимальная сфера $R_{min}$, вписанная в вертикальный конус, касается его по окружности $e$, пересекая при этом горизонтальный конус по окружностям $r$, $k$. Фронтальные проекции этих окружностей изображаются отрезками $e_2$, $r_2$ и $k_2$, которые пересекаются между собой в точках $1_2=1'_2$ и $2_2=2'_2$.

На рис. 9.8, кроме минимальной сферы, показана вспомогательная сфера $R$ произвольного радиуса ($R_{max} \geq R \geq R_{min}$ ), пересекающаяся с данными конусами по окружностям $l$ и $m$. На пересечении фронтальных проекций $l_2$, $m_2$ этих окружностей отмечены фронтальные проекции точек $3_2=3'_2$ искомой линии пересечения. Горизонтальные проекции найденных точек определяются по принадлежности их либо поверхности вертикального конуса, либо поверхности вспомогательной сферы.

В рассматриваемом примере реализован случай *проницания* (см. лекцию 8). Линия пересечения конусов представляет собой алгебраическую кривую четвертого порядка, распавшуюся на две замкнутые пространственные кривые (линию “входа” и линию “выхода”). Обе поверхности имеют общую фронтальную плоскость симметрии, поэтому на фронтальной плоскости кривая четвертого порядка изображается кривой второго порядка, в данном случае – гиперболой $g_2$. Горизонтальная ось гиперболы проходит через вершины гиперболы – точки $1_2=1'_2$ и $2_2=2'_2$, найденные с помощью минимальной сферы $R_{min}$.

**Задача 2**. *Построить линию пересечения вертикального кругового и наклонного эллиптического конусов с общей фронтальной плоскостью симметрии. Эллиптический конус имеет круговое основание $R_0$* (рис. 9.9).

Одна из поверхностей (эллиптический конус) не является поверхностью вращения, поэтому способ концентрических сфер неприменим. Поверхности имеют круговые сечения, пересекающиеся оси и общую плоскость симметрии, параллельную $\Pi_2$. Следовательно, для решения задачи может быть использован способ эксцентрических сфер (см. п. 9.2). В соответствии с этим способом, для построения общей точки двух поверхностей надо подобрать сферу, которая пересекает обе заданные поверхности по окружностям.

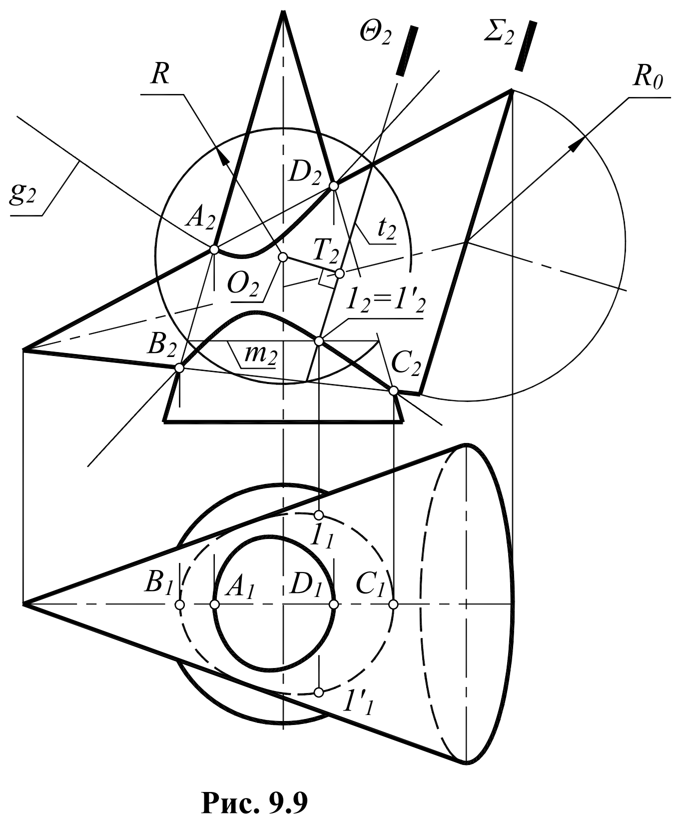


**Рис. 9.9**

Чтобы найти такую сферу, проведем плоскость $\Theta$, параллельную плоскости основания $\Sigma$ эллиптического конуса. Плоскость $\Theta$ пересекает эллиптический конус по окружности $t$ с центром $T$ (см. рис. 9.9). Перпендикуляр, восставленный к плоскости $\Theta$ из точки $T$, пересекает ось вертикального конуса в точке $O$. Проведем сферу $R$ с центром в точке $O$, проходящую через окружность $t$. Эта сфера пересекается с круговым вертикальным конусом по окружности $m$, а с эллиптическим конусом – по окружности $t$. Окружности $t$ и $m$ пересекаются в точках $1$ и $2$, принадлежащих искомой линии пересечения.

Чтобы найти дополнительные точки линии пересечения данных конусов, надо повторить вышеописанные действия: отметить какое-либо круговое сечение $t'$ эллиптического конуса и подобрать новую секущую сферу с центром на оси кругового конуса, проходящую через окружность $t'$. С помощью этой сферы будет определена еще одна пара точек, принадлежащих искомой линии пересечения.

Поверхности имеют общую фронтальную плоскость симметрии, поэтому на пересечении фронтальных очерковых линий отмечены точки $A$, $B$, $C$, $D$, принадлежащие искомой линии пересечения поверхностей. Линия пересечения – алгебраическая кривая четвертого порядка, распавшаяся на две замкнутые пространственные кривые (случай “проницания”). Фронтальная проекция этой линии – гипербола $g_2$ (см. рис. 9.9).

**Задача 3**. *Построить линию пересечения кругового конуса и сферы* (рис. 9.10).

Линия пересечения сферы и конуса может быть определена с помощью вспомогательных секущих плоскостей (см. лекцию 8, рис. 8.7), но этим способом не удается найти экстремальные относительно $П_3$ точки *1* и *2*. Для построения этих точек используется вспомогательная сфера. Отметим точку $O$ пересечения осей конуса и сферы $\Omega$ и проведем минимальную вспомогательную сферу $R_{min}$ с центром в точке $O$, касающуюся конуса по окружности $k$ и разрезающую данную сферу $\Omega$ по окружности $r$ (см. рис. 9.10). Окружности $k$ и $r$ пересекаются в точках *1* и *2*, фронтальные проекции которых совпадают. Точки *1*, *2* наиболее удалены от плоскости $П_3$, то есть являются экстремальными. Действительно, любая вспомогательная сфера с центром в точке $O$ и радиусом больше $R_{min}$, пересекает сферу $\Omega$ по окружности, расположенной ближе к $П_3$, чем окружность $r$.

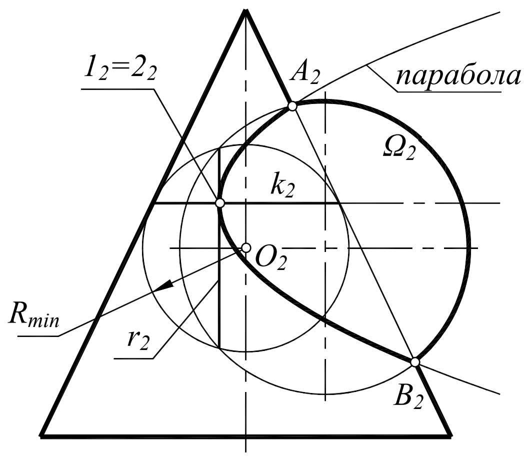



**Рис. 9.10**

*Вопросы для повторения*

1. Какие условия накладывают на выбор вспомогательной секущей поверхности?

2. По какой линии пересекаются соосные поверхности вращения?

3. Назвать условия применения способа концентрических сфер.

4. В каком диапазоне следует выбирать радиус вспомогательной секущей сферы при применении способа концентрических сфер?

5. Назвать условия применения способа эксцентрических сфер. Только ли для поверхностей вращения может быть использован этот способ?