

## Лекция 8

### ПОСТРОЕНИЕ ЛИНИИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ (СПОСОБ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ ПЛОСКОСТЕЙ)

Две поверхности пересекаются по линии, которая одновременно принадлежит каждой из них. В зависимости от вида и взаимного положения поверхностей линия их пересечения может быть прямой, ломаной или кривой (плоской или пространственной).

Напомним, что задача определения линии пересечения двух поверхностей называется *второй позиционной задачей*. Решение этой задачи сводится к построению ряда точек, одновременно принадлежащих каждой из пересекающихся поверхностей. Линия, соединяющая эти точки, будет искомой.

Точки, образующие линию пересечения, разделяют на опорные и промежуточные. К опорным точкам относятся следующие виды точек.

1. Точки на ребрах многогранников.
2. Очерковые точки, то есть точки, лежащие на очерковых линиях данных фигур.
3. Точки смены видимости искомой линии пересечения относительно плоскостей проекций.
4. Экстремальные точки, то есть самая близкая и самая удаленная точки линии пересечения относительно той или иной плоскости проекций. Экстремальные точки относительно  $\Pi_j$  называют высшей и низшей.

Основным способом построения точек, принадлежащих линии пересечения поверхностей, является *способ вспомогательных секущих поверхностей*. Сущность его заключается в том, что обе заданные поверхности “разрезаются” вспомогательной секущей поверхностью. Возникают две линии разреза, которые пересекаются между собой в точках, лежащих на обеих заданных поверхностях.

Чаще всего в качестве вспомогательных секущих поверхностей применяют плоскости (*способ вспомогательных плоскостей*) или сферы (*способ вспомогательных сфер*).

#### Схема решения второй позиционной задачи с использованием вспомогательных секущих плоскостей.

1. Проводят вспомогательную плоскость  $\Sigma$ , разрезающую заданные поверхности  $\Theta$  и  $\Gamma$  (рис. 8.1).

2. Находят линии  $t, g$  разреза заданных поверхностей вспомогательной плоскостью  $\Sigma$ .

3. Отмечают точки 1 и 2 пересечения линий разреза  $t$  и  $g$ . Эти точки находятся на обеих поверхностях, то есть на искомой линии их пересечения.

Многочисленное повторение рассмотренной схемы позволяет определить достаточное количество точек (опорных и промежуточных), через которые проходит линия пересечения данных поверхностей.

Вспомогательные секущие плоскости могут быть выбраны вполне произвольно. Тем не менее, желательно выбирать секущие плоскости так, чтобы проекции линий пересечения ее с данными поверхностями были графически простыми линиями (прямыми или окружностями).

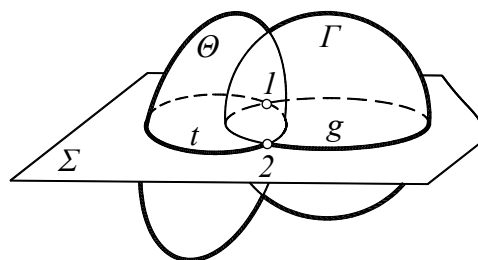


Рис. 8.1

## 8.1. Пересечение двух многогранников

При пересечении двух многогранников возможны два случая: *врезка* или *пронизание*.

При *врезке* в пересечении участвуют *частично* ребра одного и другого многогранника. При этом линия пересечения представляет собой одну замкнутую пространственную ломаную линию.

*Пронизанием* называют такой вид пересечения многогранников, при котором в пересечении принимают участие *все* ребра одного из них и только *часть* ребер второго. Линия пересечения при пронизании распадается на две замкнутые ломаные.

Как при врезке, так и при пронизании вершинами ломаной линии являются точки пересечения ребер первого многогранника с гранями второго и ребер второго многогранника с гранями первого.

**Правило.** Построение линии пересечения многогранников заключается в нахождении точек пересечения ребер первого многогранника с гранями второго и ребер второго многогранника с гранями первого (то есть в многократном решении первой позиционной задачи).

На рис. 8.2 показан случай *пронизания*: пирамида  $ABCS$  “прокалывает” трехгранную призму. При этом линия пересечения распадается на две замкнутые ломаные: пространственную ломаную линию  $1-2-3-4-5-1$  (границу “входного отверстия” в призме) и плоскую ломаную  $6-7-8$  (границу “выходного отверстия”). В пересечении принимают участие все боковые ребра пирамиды и только одно ребро  $l$  вертикальной призмы. Ребра  $m$  и  $n$  призмы в пересечении с пирамидой не участвуют.

Боковые грани призмы (см. рис. 8.2) занимают горизонтально-проецирующее положение, поэтому точки  $1, 2, 4, 6, 7, 8$  пересечения ребер пирамиды с гранями призмы отмечаются на горизонтальной плоскости проекций без вспомогательных построений. Фронтальные проекции этих точек найдены с помощью линий связи.

Для построения точек  $3$  и  $5$  пересечения ребра  $l$  призмы с гранями пирамиды потребовалось провести через ребро  $l$  вспомогательную секущую плоскость  $\Theta$ . Эта плоскость “разрезала” боковые грани пирамиды по прямым  $RS$  и  $ES$ . На пересечении прямой  $l$  с линиями  $RS$  и  $ES$  отмечены точки  $3$  и  $5$ , в которых ребро  $l$  призмы пересекается с гранями пирамиды.

Найденные точки пересечения ребер с гранями определяют вершины искомой ломаной линии пересечения многогранников.

Построение линии пересечения многогранников выполняется в соответствии со следующим правилом: **соединяют отрезками прямых только те пары вершин, которые лежат в одной и той же грани первого многогранника и одновременно в одной и той же грани второго.**

Например, на рис. 8.2 точка  $1$  соединена с точкой  $5$ , так как точки  $1, 5$  принадлежат грани  $ACS$  пирамиды и одновременно грани  $l||m$  призмы. Точки  $1$  и  $3$  соединять нельзя,

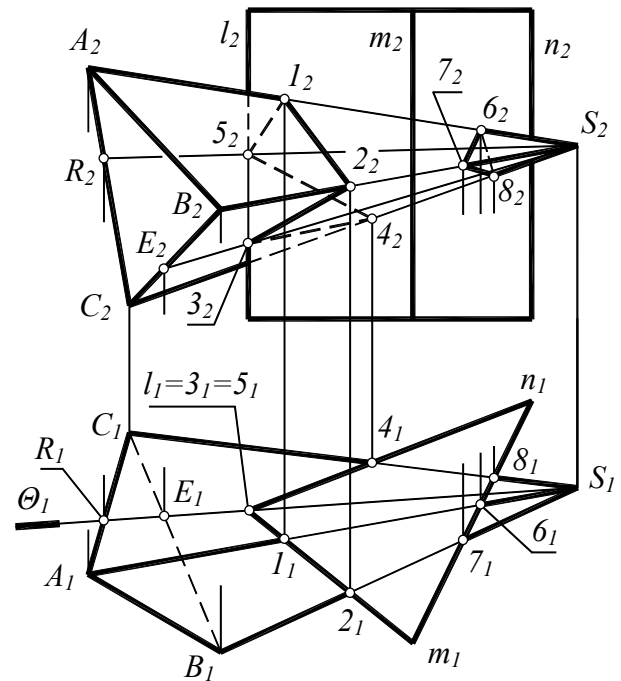


Рис. 8.2

так как они находятся на разных гранях пирамиды. Также нельзя соединять точки  $1$  и  $4$ , так как они находятся на одной и той же грани пирамиды, но на разных гранях призмы.

Видимость ребер многогранников и линии их пересечения на чертеже определяется с помощью конкурирующих точек.

## 8.2. Пересечение многогранника и кривой поверхности

Линия пересечения многогранной и кривой поверхностей в общем случае представляет собой совокупность плоских кривых линий, которые получаются в пересечении граней многогранника и кривой поверхности. Эти кривые линии пересекаются в точках, лежащих на ребрах многогранника.

Построение линии пересечения произвольной поверхности с многогранником сводится к построению линии пересечения данной поверхности с каждой гранью многогранника.

**Задача 1.** Построить линию пересечения прямого кругового конуса и трехгранной призмы (рис. 8.3).

Боковые грани призмы занимают фронтально-проецирующее положение, поэтому фронтальная проекция искомой линии пересечения совпадает с фронтальным очерком призмы (с той его частью, которая заключена “внутри” фронтального очерка конуса).

Отмечаем на фронтальной проекции опорные точки  $1...5$  и с помощью вспомогательных секущих плоскостей находим их горизонтальные проекции. Например, через точки  $1$  и  $2$  проведена секущая плоскость  $\Gamma$ , пересекающая конус по окружности  $l$ . Горизонтальные проекции точек  $1, 2$  принадлежат горизонтальной проекции  $l_1$  этой окружности. Промежуточные точки  $6, 7$  и  $8, 9$  найдены с помощью вспомогательной плоскости  $\Delta$ , пересекающей конус по параллели  $m$ . Горизонтальные проекции этих точек принадлежат горизонтальной проекции  $m_1$  параллели  $m$ .

Грани призмы пересекают поверхность конуса по кривым второго порядка. Рассмотрим линии, возникающие в пересечении конуса с гранями призмы.

1. Грань  $\Theta$ , параллельная очерковой образующей конуса, пересекает конус по *параболе*, для точного построения которой на чертеже отмечена ее вершина  $A$ . Парабола проходит через точку  $A$  и пары точек  $1-2, 3-4, 6-7$ , симметричные относительно общей плоскости симметрии  $\Phi$  конуса и призмы.

2. Грань  $\Sigma$  пересекает конус по *эллипсу*. Для точного построения эллипса на чертеже отмечена точка  $B$  пересечения плоскости  $\Sigma$  и очерковой образующей конуса. Эллипс проходит через точку  $B$  (самая верхняя точка эллипса), через точку  $5$  (самая нижняя точка эллипса) и через пары точек  $1-2, 8-9$ .

3. Горизонтальная грань  $\Lambda$  пересекает поверхность конуса по *окружности*, проходящей через пару симметричных относительно  $\Phi$  точек  $3-4$ .

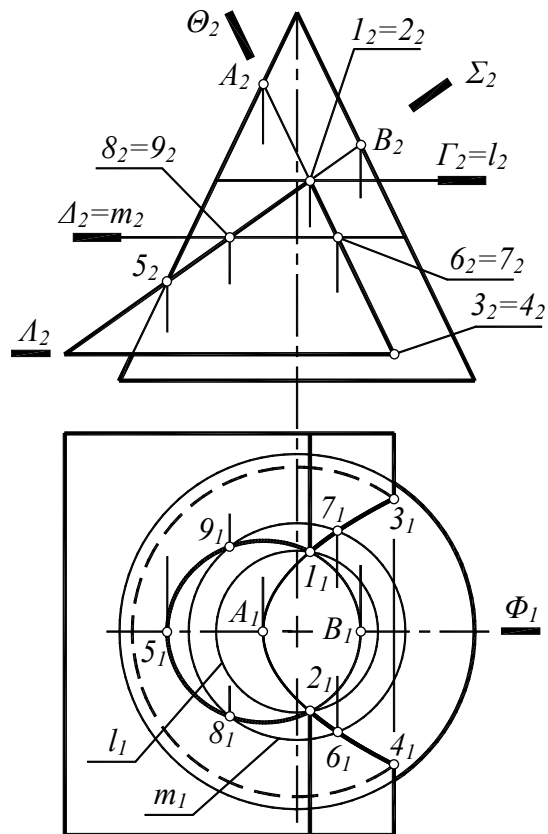


Рис. 8.3

Таким образом, линия пересечения конуса и призмы складывается из участка параболы, участка эллипса и участка окружности. Эллипс и парабола стыкуются в точках 1 и 2, парабола и окружность – в точках 3 и 4. В этих точках составная линия пересечения претерпевает излом.

**Задача 2.** Построить линию пересечения сферы и правильной трехгранной пирамиды (рис. 8.4).

Боковые грани правильной пирамиды равны и равно наклонены к горизонтальной плоскости проекций. В соответствии с условием задачи, боковые грани пирамиды пересекают сферу по одинаковым дугам окружностей. Следовательно, искомая линия пересечения представляет собой совокупность трех одинаковых дуг, пересекающихся между собой в точках на ребрах пирамиды.

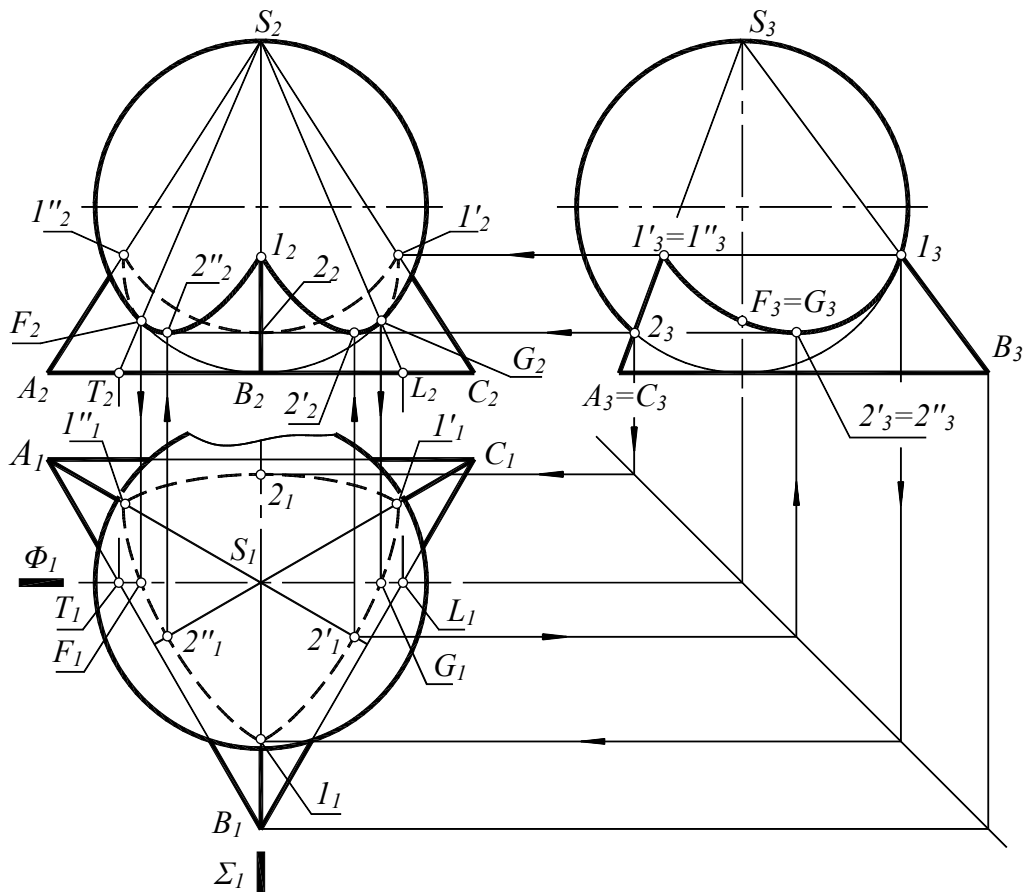


Рис. 8.4

Задача решается способом вспомогательных секущих плоскостей. Заметим, что заданные поверхности (сфера и пирамида) имеют общую плоскость симметрии  $\Sigma$ , параллельную плоскости проекций  $\Pi_3$ . В плоскости  $\Sigma$  располагаются экстремальные (верхняя и нижняя) точки искомой линии пересечения. Мысленно “разрезая” данные поверхности плоскостью  $\Sigma$ , получаем на  $\Pi_3$  линии разреза, которые совпадают с очерковыми линиями сферы и пирамиды. Эти линии пересекаются в точках 1 и 2 (самой верхней и самой нижней точках искомой линии пересечения).

В точке 1 ребро  $BS$  пирамиды пересекается с поверхностью сферы. Согласно условию задачи, боковые ребра пирамиды симметрично расположены относительно сферы. Поэтому можно сразу отметить точки пересечения ребра  $CS$  (точка  $1'$ ) и ребра  $AS$  (точка  $1''$ ) со сферой. Точки  $1, 1'$  и  $1''$  расположены на одной высоте. Это самые верхние точки составной линии пересечения данных фигур.

Точка 2 расположена на оси симметрии грани  $ACS$ . Все три боковые грани пирамиды симметричны относительно сферы, поэтому можно “перенести” точку 2 на ось симметрии грани  $BCS$  (точка  $2'$ ) и ось симметрии грани  $ABS$  (точка  $2''$ ). Точки 2,  $2'$  и  $2''$  расположены на одной высоте. Это нижние точки искомой линии пересечения.

В пересечении сферы с гранью  $ABS$  получаем дугу окружности  $1-2''-1''$ , в пересечении с гранью  $ACS$  – дугу  $1'-2-1'$ , в пересечении с гранью  $BCS$  – дугу  $1-2'-1'$ . Дуги окружностей на чертеже изображаются участками эллипсов.

Исследуем видимость линии пересечения.

1. На горизонтальной плоскости проекций вся линия полностью невидима, так как закрыта от наблюдателя верхней половиной сферы.

2. На профильной плоскости видимая проекция участка  $1-2''-1''$  совпадает с невидимой проекцией участка  $1-2'-1'$ . Грань  $ACS$  – профильно-проецирующая, поэтому профильная проекция участка  $1''-2-1''$  совпадает с профильной проекцией грани  $ACS$ .

3. Для определения видимости на фронтальной плоскости проекций используем плоскость смены видимости  $\Phi$ , пересекающую сферу по окружности, а пирамиду по треугольнику  $TSL$ . Эти линии (окружность и треугольник) пересекаются в точках смены видимости  $G$  и  $F$ . Точки  $G$  и  $F$  являются очерковыми, так как находятся на фронтальном очерке сферы.

После построения опорных точек (экстремальных, очерковых, точек смены видимости) приступают к построению промежуточных точек искомой линии пересечения поверхностей. Между экстремальными точками 1 и 2 проводят вспомогательную горизонтальную плоскость уровня, которая пересекает пирамиду по треугольнику, а сферу по окружности. Точки пересечения этих линий – дополнительные точки искомой линии пересечения данных поверхностей. На рис. 8.4 это построение не показано.

### 8.3. Взаимное пересечение кривых поверхностей

В общем случае линия пересечения двух кривых поверхностей – пространственная кривая линия. В частных случаях эта линия может распадаться на несколько замкнутых плоских или пространственных кривых.

При пересечении двух произвольных поверхностей возможны два случая: врезка и проникание. При врезке линия пересечения представляет собой замкнутую пространственную кривую. При проникании эта линия распадается на две замкнутые пространственные кривые. Например, на рис. 8.5 показана взаимная врезка сферы и конуса, а на рис. 8.6 – проникание конуса сквозь сферу. В первом случае линия пересечения – замкнутая кривая, во втором – линия пересечения распалась на две замкнутые пространственные кривые линии (линию “входа” и линию “выхода”).

Если в пересечении участвуют алгебраические поверхности, то линия их пересечения – алгебраическая кривая. Порядок этой линии равен произведению порядков поверхностей. В частности, показанные на рис. 8.5 и рис. 8.6 конус и сфера – алгебраические поверхности второго порядка. Линия пересечения поверхностей второго порядка – алгебраическая кривая четвертого порядка. Конус и сфера пересекаются по кривой линии, которая описывается алгебраическим уравнением четвертого порядка.

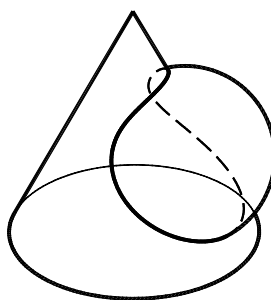


Рис. 8.5

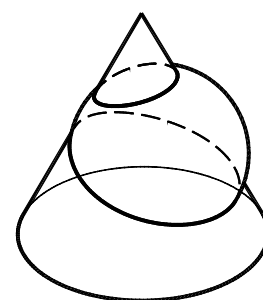


Рис. 8.6

В случае врезки эта линия представляет собой замкнутую пространственную кривую (см. рис. 8.5), а в случае проникания получается кривая четвертого порядка, состоящая из двух не связанных между собой участков (см. рис. 8.6).

**Задача 1.** Построить линию пересечения прямого кругового конуса и сферы.

Построение линии пересечения следует начинать с поиска опорных точек (экстремальных, очерковых и точек смены видимости).

Для определения экстремальных точек вводим в рассмотрение общую плоскость симметрии данных фигур (рис. 8.7). Общая плоскость симметрии  $\Sigma$  пересекает конус по треугольнику, а сферу – по окружности. Фронтальные проекции этих линий называют фронтальными очерковыми линиями данных фигур.

Фронтальные очерковые линии конуса и сферы пересекаются в точках  $A$  и  $B$  (см. рис. 8.7). Точки  $A$  и  $B$  – экстремальные (верхняя и нижняя) относительно горизонтальной плоскости проекций. Таким образом, использование общей плоскости симметрии  $\Sigma$  позволяет определить экстремальные точки искомой линии пересечения.

Наиболее удаленные от  $\Pi_3$  точки  $1$  и  $2$  являются экстремальными точками относительно профильной плоскости проекций. Построение этих точек выполняется с помощью вписанной в конус вспомогательной сферы  $\Omega$  радиусом  $OT$ , центр  $O$  которой находится в точке пересечения осей сферы и конуса (см. также лекцию 9, рис. 9.9).

Для дальнейших рассуждений целесообразно уподобить сферу земному шару. Верхнюю точку сферы будем считать “северным полюсом”, нижнюю точку – “южным полюсом”. Между полюсами расположен “экватор” (большой круг на сфере, лежащий в плоскости, отмеченной на рис. 8.7 буквой  $\Phi$ ).

Плоскость  $\Phi$  является *плоскостью смены видимости* для горизонтальной проекции данных фигур. Действительно, точки на сфере, лежащие выше “экваториальной плоскости”  $\Phi$ , при взгляде сверху будут видимыми. Точки на сфере, расположенные ниже плоскости  $\Phi$  – невидимы, так как заслонены от наблюдателя верхней половиной сферы.

Применение вспомогательной плоскости  $\Phi$  позволяет определить *точки смены видимости*  $3$  и  $4$  на горизонтальной проекции данных поверхностей. Для определения точек  $3$  и  $4$  мысленно разрежем сферу и конус плоскостью  $\Phi$ . Плоскость  $\Phi$  пересекает сферу по “экватору”  $e$ , а конус – по окружности  $r$ . На пересечении горизонтальных проекций  $e_1$  и  $r_1$  отмечаем горизонтальные проекции  $3_1$  и  $4_1$  точек смены видимости.

Точки  $3$  и  $4$  являются одновременно как точками смены видимости, так и *очерковыми* точками, поскольку они находятся на горизонтальном очерке сферы. При переходе из верхнего (“северного”) полушария в нижнее (“южное”) полушарие, линия пересечения сферы и конуса на плоскости  $\Pi_1$  становится невидимой. Видимость линии меняется в точках  $3$  и  $4$ , лежащих в плоскости смены видимости  $\Phi$ .

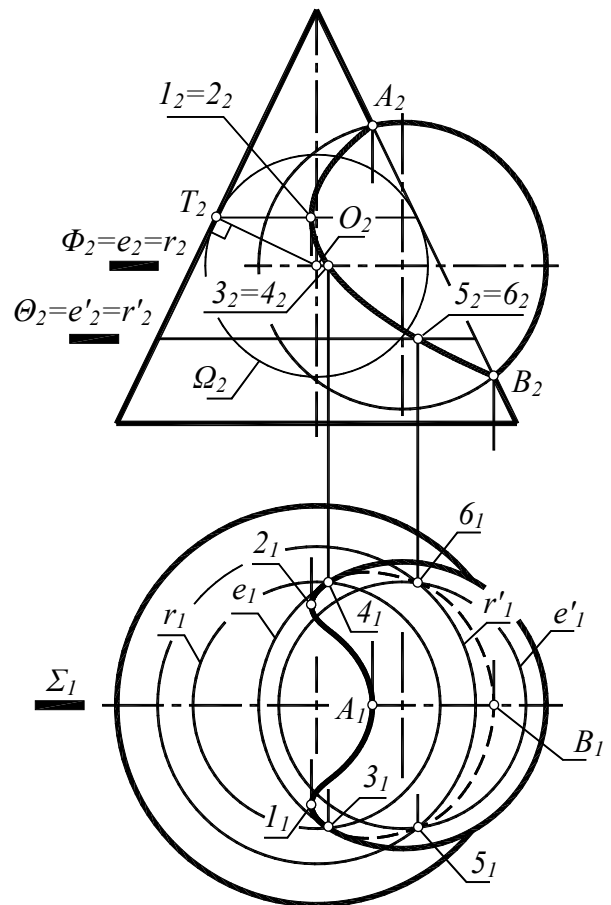


Рис. 8.7

Напомним, что экстремальные точки, очерковые точки и точки смены видимости называют *опорными* точками. После определения опорных точек линии пересечения приступают к построению ее *промежуточных* точек. На рис. 8.7 показана вспомогательная горизонтальная плоскость  $\Theta$ , разрезающая сферу и конус по окружностям  $e'$  и  $r'$ . На пересечении этих линий отмечаем пару точек 5 и 6, симметрично расположенных относительно общей плоскости симметрии  $\Sigma$ .

Соединяя найденные точки плавной кривой, получаем искомую линию пересечения конуса и сферы. На горизонтальной плоскости проекций эта линия частично невидима, а на фронтальной проекции видимый участок линии пересечения совпадает с невидимым.

Полученная линия пересечения алгебраических поверхностей второго порядка (конуса и сферы) – алгебраическая кривая четвертого порядка. Эта кривая симметрична относительно фронтальной плоскости уровня  $\Sigma$ , поэтому ее фронтальная проекция вырождается в кривую второго порядка. В рассматриваемом примере фронтальная проекция линии пересечения вырождается в параболу с вершиной в точке  $l_2=2_2$  и горизонтальной осью.

**Задача 2.** Построить линию пересечения поверхностей открытого тора и кругового цилиндра (рис. 8.8).

Для определения опорных точек вводим в рассмотрение общую плоскость симметрии  $\Sigma$  данных фигур. Фронтальные проекции линий пересечения тора и цилиндра плоскостью  $\Sigma$  совпадают с их фронтальными очерками, поэтому точки  $A, B, C$  пересечения очерковых линий принадлежат искомой линии пересечения. Точка  $B$  – экстремальная относительно горизонтальной плоскости проекций, точка  $A$  – наиболее удалена от профильной плоскости (экстремальная относительно  $P_3$ ). Опорная точка  $D$  отмечается в плоскости  $\Omega$  на пересечении линий основания тора и цилиндра.

Построение промежуточных точек упрощается тем, что одна из заданных поверхностей – проецирующая. В рассматриваемом примере цилиндрическая поверхность занимает горизонтально-проецирующее положение, поэтому на плоскости  $\Pi_1$  проекция искомой линии пересечения совпадает с проекцией цилиндра.

Плоскость  $\Theta$ , касающаяся цилиндра и перпендикулярная к оси тора, пересекает тор по параллели  $t$ . На этой параллели отмечаем опорную точку  $I$  (экстремальную относительно  $P_2$ ).

Проводим произвольную вспомогательную секущую плоскость  $A$ , перпендикулярную оси вращения  $i$  тора. Эта плоскость пересекает тор по окружностям (параллелям)  $l$  и  $l'$ . Начертив фронтальные проекции параллелей  $l$  и  $l'$ , отмечаем на них промежуточные точки 2, 3, 4. Соединяя найденные опорные и промежуточные точки, получаем фронтальную проекцию искомой линии пересечения тора и цилиндра (ее горизонтальная

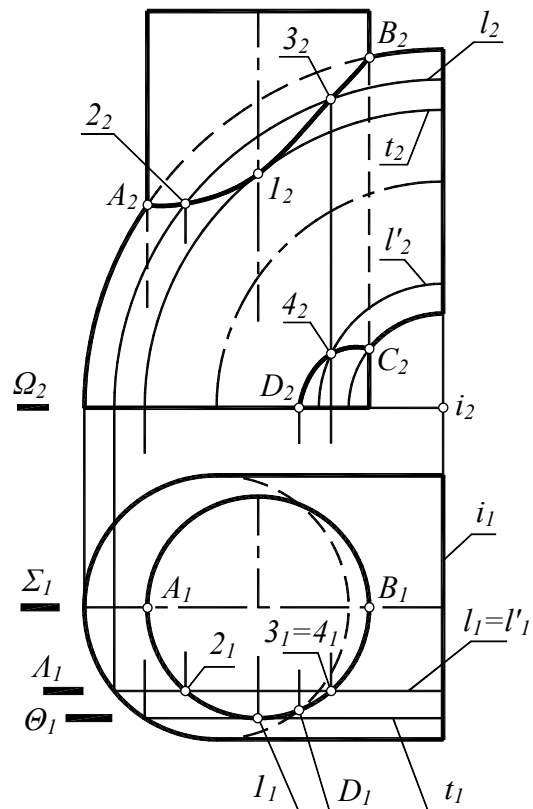


Рис. 8.8

проекции искомой линии пересечения тора и цилиндра (ее горизонтальная

проекция совпадает с горизонтальной проекцией цилиндра). Линия пересечения тора и цилиндра симметрична относительно их общей плоскости симметрии  $\Sigma$ .

#### 8.4. Пересечение произвольной поверхности с проецирующей поверхностью

Напомним, что плоскость, перпендикулярная к какой-либо плоскости проекций, называется *проецирующей плоскостью* (см. п. 2.3.3.1). Это определение распространяется на цилиндрические и призматические поверхности.

**Определение 1.** Если образующие цилиндрической поверхности перпендикулярны к какой-либо плоскости проекций, то такую поверхность называют *проецирующей цилиндрической поверхностью*.

**Определение 2.** Если ребра призматической поверхности перпендикулярны к какой-либо плоскости проекций, то такую поверхность называют *проецирующей призматической поверхностью*.

Очевидно, занимать проецирующее положение могут, кроме плоскости, только цилиндрические и призматические поверхности.

Задача на построение линии пересечения поверхностей решается наиболее просто, если одна из данных поверхностей – проецирующая. В этом случае проекция искомой линии пересечения на одну из плоскостей проекций уже известна (непосредственно из чертежа заданных поверхностей). Построение недостающей проекции линии пересечения выполняется “по точкам” и сводится к многократному решению задачи на принадлежность точки к той поверхности, которая не является проецирующей (см. п. 6.2).

**Пример 1.** На рис. 8.2 треугольная призма занимает горизонтально-проецирующее положение. Горизонтальная проекция линии пересечения принадлежит горизонтальной проекции призматической поверхности, поэтому для построения линии пересечения призмы с пирамидой потребовалось всего лишь найти недостающие фронтальные проекции характерных (опорных) точек искомой линии пересечения (из условия их принадлежности к поверхности пирамиды).

**Пример 2.** На рис. 8.3 треугольная призма занимает фронтально-проецирующее положение, поэтому фронтальная проекция линии пересечения призмы и конуса принадлежит фронтальной проекции призматической поверхности. Горизонтальные проекции точек искомой линии пересечения определяются на чертеже по их принадлежности к поверхности конуса.

**Пример 3.** На рис. 8.8 цилиндрическая поверхность занимает горизонтально-проецирующее положение, поэтому горизонтальная проекция искомой линии пересечения поверхностей тора и проецирующего цилиндра совпадает с горизонтальной проекцией цилиндра. Построение недостающей фронтальной проекции линии пересечения тора и цилиндра выполняется “по точкам” и сводится к многократному решению задачи на принадлежность точки к поверхности тора (см. п. 6.2.5.3).

#### *Вопросы для повторения*

1. Какую геометрическую задачу называют второй позиционной задачей?
  2. В чем состоит сущность способа вспомогательных секущих плоскостей?
  3. Каков критерий выбора вспомогательной секущей плоскости?
  5. Как определяется порядок линии пересечения двух алгебраических поверхностей? Может ли пространственная алгебраическая кривая восьмого порядка изображаться на одной из плоскостей проекций окружностью? Дать пример.
- У К А З А Н И Е. Тор – алгебраическая поверхность четвертого порядка.