Лекция 7

ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТИ С ПЛОСКОСТЬЮ И С ПРЯМОЙ ЛИНИЕЙ

В предыдущих лекциях рассматривались чертежи простейших геометрических фигур (точек, прямых, плоскостей) и произвольных кривых линий и поверхностей, находящихся в трехмерном пространстве. Эти фигуры могут пересекаться между собой, образуя общие элементы. Например, линия и поверхность пересекаются в одной или нескольких точках, а поверхности пересекаются по линии.

Задачи, в которых находят общие элементы геометрических фигур, называются позиционными. Различают *первую позиционную задачу* (построение точек пересечения линии и поверхности) и *вторую позиционную задачу* (построение линии пересечения двух поверхностей).

В лекции 3 были решены простейшие позиционные задачи: построение точки пересечения прямой с плоскостью и построение линии пересечения двух плоскостей (прямая – это простейшая линия, а плоскость - простейшая поверхность). Продолжим рассмотрение позиционных задач, переходя к более сложным геометрическим фигурам трехмерного пространства.

7.1. Пересечение многогранника с плоскостью

Напомним, что многогранник – пространственная геометрическая фигура, со всех сторон ограниченная отсеками плоскостей (гранями). Элементы многогранника – грани, ребра (прямые линии, по которым пересекаются грани) и вершины (точки пересечения ребер). Совокупность вершин и ребер называют сеткой многогранника.

В пересечении многогранника с плоскостью получается плоская замкнутая ломаная линия, вершинами которой являются точки пересечения ребер многогранника с секущей плоскостью.

Построение линии пересечения многогранника с плоскостью сводится к определению точек пересечения ребер многогранника с плоскостью, то есть к многократному решению первой позиционной задачи.

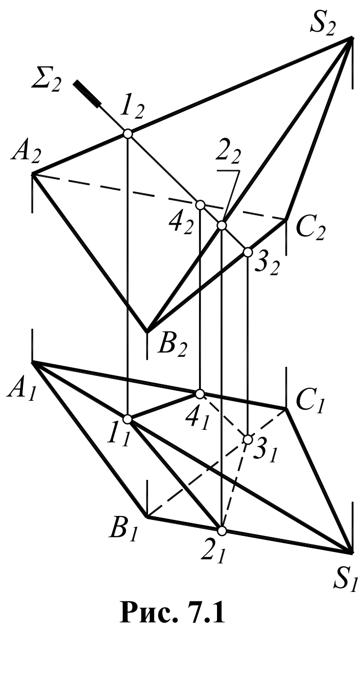

Рис. 7.1

Задача 1. *Построить линию пересечения многогранника с проецирующей плоскостью*. На рис. 7.1 показан тетраэдр, рассеченный проецирующей плоскостью *Σ*. Отмечаем точки *1*, *2*, *3*, *4* пересечения плоскости *Σ* с ребрами многогранника и соединяем найденные точки отрезками прямой линии. Получаем плоскую замкнутую ломаную линию *1-2-3-4*. При построении этой линии обязательно следует учитывать следующее правило.

Правило. *Отрезками прямой соединяются только те точки, которые лежат на одной и той же грани многогранника.*

Например, на рис. 7.1 соединены точки *1* и *2*, потому что они лежат на одной и той же грани *ABS*. Точки *1* и *3* соединять нельзя, так как они принадлежат разным граням тетраэдра: линия *1-3* проходит не по поверхности, а *внутри* тетраэдра.

Задача 2. *Построить линию разреза пирамиды плоскостью общего положения.* Плоскость *Ф* общего положения, заданная параллельными прямыми *m*, *n*, пересекает пирамиду *ABCS* (рис. 7.2).

Для решения задачи надо найти точки пересечения ребер пирамиды с секущей плоскостью *Ф(m||n)* и соединить найденные точки ломаной линией.

1. Построение точки $M=AS\cap Ф$ (первая позиционная задача). Проводим через ребро *AS* вспомогательную секущую плоскость *Δ*. На пересечении ребра *AS* и линии $(1\text{-}2)=Δ\cap Ф$ отмечаем искомую точку *M*.

2. Построение точки $N=BS\cap Ф$ (первая позиционная задача). Через ребро *BS* проведена вспомогательная секущая плоскость *Σ*. Точка *N* – на пересечении ребра *BS* с линией $(3\text{-}4)=Σ\cap Ф$.

3. Построение точки $K=CS\cap Ф$ (первая позиционная задача). Проводим через ребро *CS* секущую плоскость *Г* и находим линию $(5\text{-}6)=Г\cap Ф$. Точку *K* отмечаем на пересечении линии *5-6* и ребра *CS*.

Таким образом, построение линии пересечения пирамиды с плоскостью общего положения (см. рис. 7.2) сведено к трехкратному решению первой позиционной задачи. Треугольник *MNK* – искомая линия пересечения пирамиды *ABCS* с плоскостью *Ф(m||n)*.

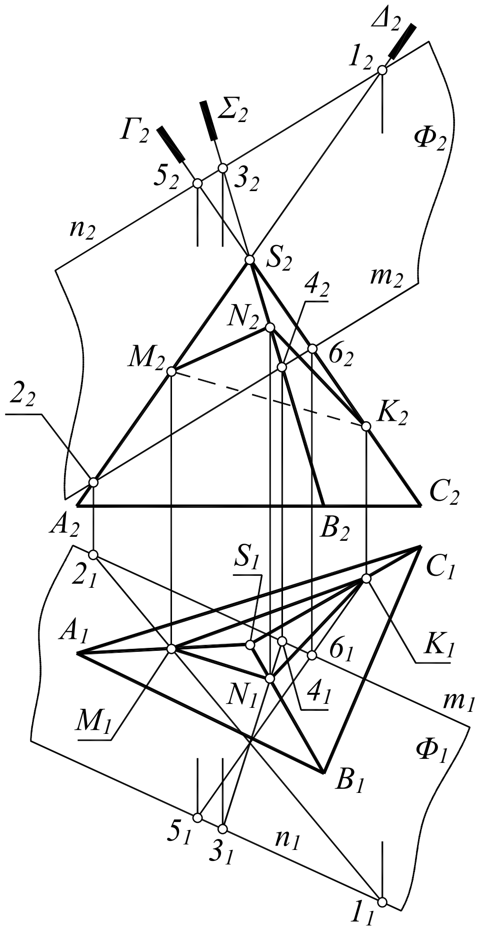

Рис. 7.2

7.2. Пересечение кривой поверхности с плоскостью

В пересечении кривой поверхности с плоскостью получается плоская кривая линия. Точки линии пересечения условно разделяют на *опорные* и *промежуточные*.

К опорным точкам относятся:

– *экстремальные точки*, то есть наиболее близкие и наиболее удаленные точки от той или иной плоскости проекций: низшая и высшая точки (относительно горизонтальной плоскости проекций), ближняя и дальняя точки (относительно фронтальной плоскости проекций), левая и правая точки (относительно профильной плоскости проекций);

–*очерковые точки*, то есть точки, проекции которых принадлежат очерку проекции поверхности;

–*точки смены видимости*, то есть очерковые точки, в которых меняется видимость проекции линии пересечения.

Все остальные точки линии пересечения поверхностей называют промежуточными. При построении линии пересечения в первую очередь определяют опорные точки искомой линии пересечения, а затем – промежуточные.

Как опорные, так и промежуточные точки линии пересечения любых поверхностей определяются по следующей схеме.

1. Данные поверхности пересекаются *вспомогательной поверхностью* (например, плоскостью или сферой).

2. Определяются линии пересечения вспомогательной поверхности с каждой из заданных поверхностей.

3. Отмечаются точки пересечения полученных линий. Эти точки принадлежат искомой линии пересечения данных поверхностей.

Многократно повторяя указанную схему, можно получить любое количество точек линии пересечения.

Задача 1. *Построить линию m разреза сферы проецирующей плоскостью Σ.*

Заданные поверхности (сфера и плоскость Σ) имеют *общую плоскость симметрии*, обозначенную на чертеже буквой Φ (рис. 7.3). Плоскость Φ делит обе заданные поверхности на две одинаковые “половинки”, зеркально симметричные относительно плоскости Φ. В силу этого линия разреза сферы плоскостью Σ симметрична относительно Φ.

Истинная форма линии m – окружность, так как любая плоскость пересекает сферу по окружности. Фронтальная проекция m_2 окружности m совпадает с фронтальной проекцией плоскости Σ. Горизонтальная проекция m_1 окружности m – эллипс с центром O и главными осями A_1B_1 и D_1E_1, где A, B, D, E – экстремальные точки. Экстремальные относительно Π_1 точки A и B (высшая и низшая) лежат в общей плоскости симметрии Φ. Экстремальные относительно Π_2 точки D и E (ближняя и дальняя) построены с помощью горизонтальной секущей плоскости Δ, проведенной через центр O окружности m (см. рис. 7.3).

Точки смены видимости C и C' относительно горизонтальной плоскости проекций лежат в горизонтальной плоскости, обозначенной на чертеже буквой Γ. Все точки на сфере, лежащие *выше* плоскости Γ, видны на горизонтальной проекции. Точки на нижней половине сферы (ниже плоскости Γ) будут на горизонтальной проекции невидимыми (закрыты от наблюдателя верхней половиной сферы). Поэтому плоскость Γ, отделяющую верхнюю часть сферы от нижней, называют *плоскостью смены видимости относительно горизонтальной плоскости проекций.*

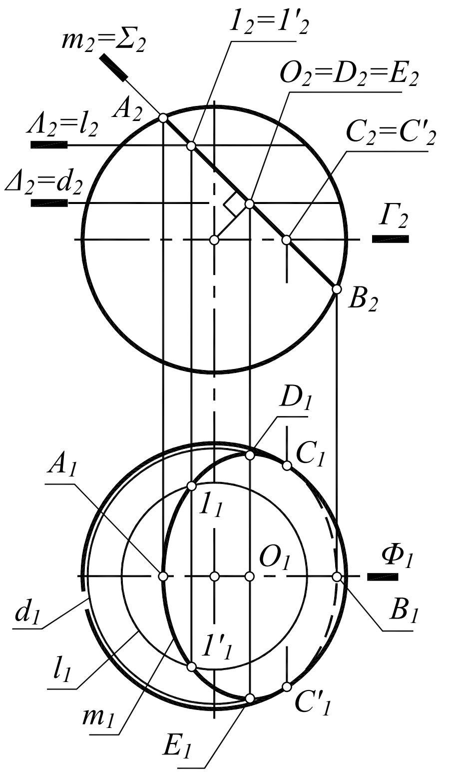

Рис. 7.3

Точки смены видимости C и C' одновременно являются *очерковыми точками*, так как они лежат на горизонтальном очерке сферы. В этих точках меняется видимость горизонтальной проекции искомой линии m.

После определения опорных точек (экстремальных, очерковых, точек смены видимости) переходим к построению промежуточных точек. На фронтальной проекции линии m отмечаем произвольную промежуточную точку 1. Линия m симметрична относительно общей плоскости симметрии Φ, поэтому точка 1 – “двойная”. Вторую точку, симметричную точке 1, обозначаем той же цифрой 1, но с добавлением штриха: $1_2=1'_2$.

Точки 1 и $1'$ находятся на сфере. Чтобы найти их горизонтальные проекции, проводим через них вспомогательную горизонтальную плоскость Λ. Плоскость Λ рассекает сферу по окружности l (параллели). Начертив горизонтальную проекцию l_1 параллели l, отмечаем на ней горизонтальные проекции точек 1 и $1'$.

Через найденные точки A, B, C, C', D, E, 1, $1'$ проходит искомая линия m пересечения сферы с плоскостью Σ. Горизонтальная проекция m_1 линии m – эллипс с главными осями A_1B_1 и D_1E_1. Истинная форма линии m – окружность с диаметром A_2B_2.

Задача 2. *Построить линию пересечения поверхности конуса вращения и плоскости общего положения* Σ (рис. 7.4).

Предварительно преобразуем чертеж так, чтобы плоскость Σ, заданная параллельными прямыми a, b, заняла проецирующее положение. Для этого начертим в плоскости $\Sigma(a||b)$ горизонталь $h=AB$ и заменим плоскость Π_2 плоскостью Π_4, расположенной перпендикулярно к горизонтали h. В новой системе координат Π_1/Π_4 плоскость $\Sigma(a||b)$ становится проецирующей: $\Sigma\perp\Pi_4$. Проекция Σ_4 этой плоскости "выродилась" в прямую линию $\Sigma_4=a_4=b_4$.

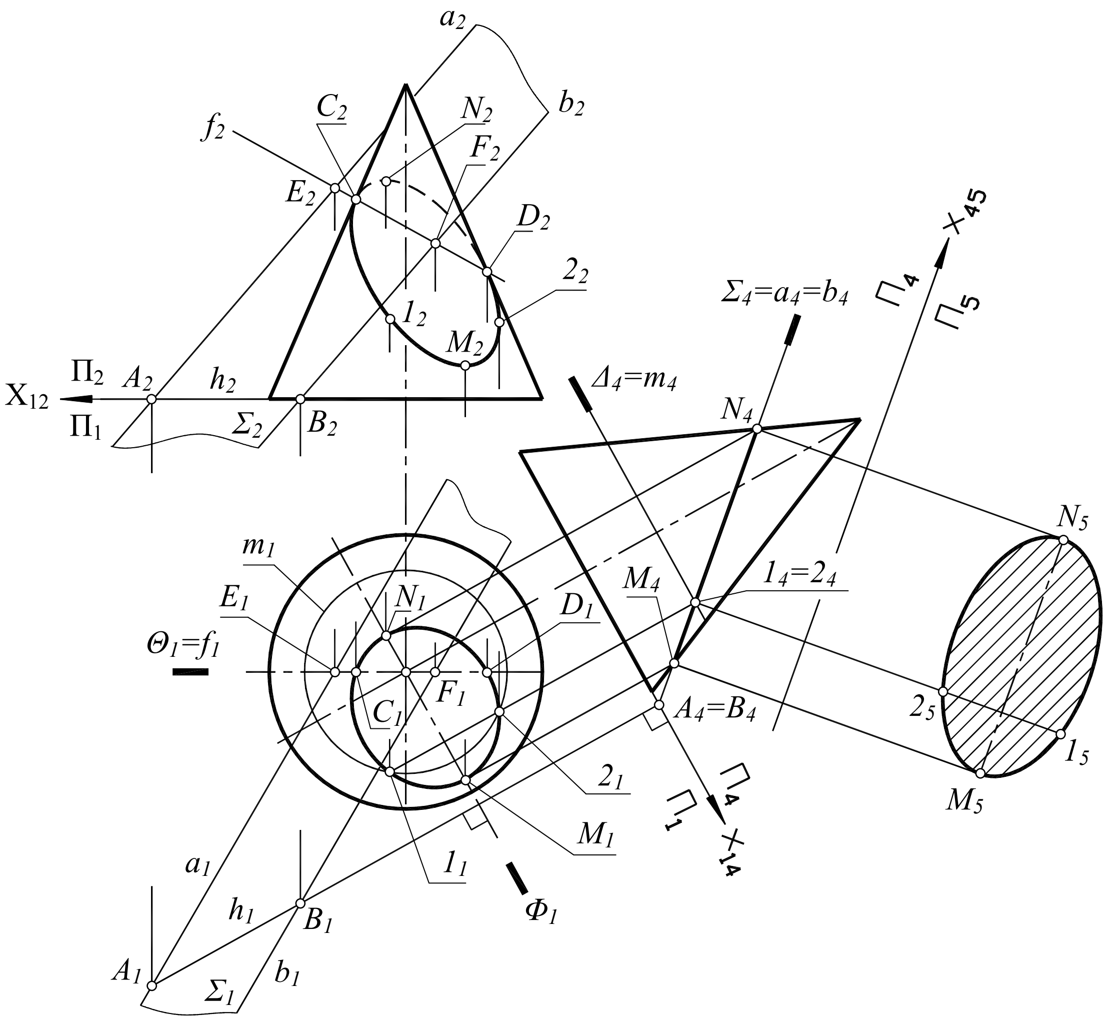

Рис. 7.4

На плоскости проекций Π_4 отмечаем экстремальные (верхнюю и нижнюю) точки N и M искомой линии пересечения плоскости Σ с конусом. Экстремальные точки N и M находятся в *общей плоскости симметрии* заданных поверхностей. Эта плоскость обозначена на рис. 7.4 буквой Φ. Плоскости Φ и Π_4 параллельны.

С помощью линий связи "возвращаем" верхнюю и нижнюю точки M, N в исходную систему координат Π_1/Π_2. Плоскости проекций Π_2 и Π_4 перпендикулярны горизонтальной плоскости Π_1, поэтому высотные отметки (координаты по оси z) точек M, N без изменений переносятся с плоскости Π_4 на плоскость Π_2.

Линия пересечения конуса с плоскостью Σ полностью видима на горизонтальной плоскости проекций. На фронтальной плоскости проекций эта линия видна только частично. Чтобы построить точки смены видимости на Π_2, отмечаем на чертеже *плоскость смены видимости* Θ, отделяющую "переднюю" часть поверхности конуса, видимую на фронтальной плоскости проекций Π_2, от "задней" (невидимой).

Плоскость Θ пересекает конус по фронтальному очерку (фронтальный очерк конуса – треугольник), а заданную плоскость Σ – по фронтали $f=EF$. Фронтальный очерк конуса и фронтальная проекция фронтали f_2 пересекаются в точках смены видимости C и D. В этих точках линия пересечения "переходит" с передней (видимой на Π_2) части конуса на его заднюю (невидимую) часть.

Найденные точки смены видимости C и D одновременно являются очерковыми, так как они находятся на фронтальном очерке конуса.

После определения *опорных точек* (экстремальных точек M, N и точек смены видимости C, D) находят *промежуточные точки* линии пересечения. Промежуточные точки нужны для увеличения точности построения искомой линии. Любое количество промежуточных точек можно определить с помощью вспомогательных секущих плоскостей. Например, промежуточные точки *1* и *2* найдены с помощью вспомогательной плоскости Δ, пересекающей конус по окружности m (см. рис. 7.4).

Для построения истинной формы сечения конуса плоскостью Σ введена в рассмотрение новая плоскость проекций Π_5, параллельная плоскости Σ. Ширина сечения относительно его оси симметрии MN одинакова как на Π_1, так и на Π_5, поэтому расстояние между проекциями промежуточных точек 1_5 и 2_5 на плоскости Π_5 равно расстоянию между проекциями 1_1 и 2_1 этих же точек на плоскости Π_1.

7.3. Конические сечения

При пересечении произвольной конической поверхности второго порядка плоскостями могут быть получены все виды кривых второго порядка: *эллипс* (либо *окружность* как частный случай эллипса), *парабола* и *гипербола*. Эти линии называются *коническими сечениями*.

Эллипс. Если плоскость Σ пересекает *все образующие* конуса, то в сечении получается замкнутая кривая второго порядка, не имеющая несобственных точек – *эллипс* (рис. 7.5, *а*). Если секущая плоскость Σ перпендикулярна оси конуса – получаем окружность (частный случай эллипса).

Парабола. Если секущая плоскость Σ параллельна какой-нибудь *одной* образующей l конуса (пересекает ее в несобственной точке), то в сечении получается кривая второго порядка, имеющая одну бесконечно удаленную (несобственную) точку – *парабола* (рис. 7.5, *б*). В частности, если секущая плоскость касается конуса вдоль какой-либо образующей l – получаем параболу, выродившуюся в двойную прямую l.

Напомним, что *все параболы подобны друг другу* (см. п. 6.1.1.3). Параболы отличаются друг от друга только своим параметром p. Аналогичным образом, все окружности подобны, так как отличаются друг от друга только одним размером: радиусом R. Поэтому две произвольные параболы всегда можно совместить друг с другом, используя преобразования подобия и перемещения.

Гипербола. Если секущая плоскость Σ параллельна *двум образующим* конуса l и m (пересекает их в несобственных точках), то в сечении получается кривая второго порядка, имеющая две несобственные точки – *гипербола* (рис. 7.5, *в*). В частности, если секущая плоскость проходит через вершину конуса, то гипербола вырождается в две пересекающиеся прямые (действительные или мнимые).

Учитывая, что конус – двуполостная поверхность, можно классифицировать конические сечения по следующему признаку.

Если секущая плоскость пересекает только одну из двух полостей конуса – получаем замкнутую кривую (эллипс).

Если секущая плоскость пересекает обе полости конуса – получаем кривую с двумя “ветками” (гиперболу).

Парабола – предельный случай как эллипса, так и гиперболы. Секущая плоскость располагается так, что при бесконечно малом повороте этой плоскости в ту или другую сторону получается либо эллипс, либо гипербола. Например, на рис. 7.5, *б* малый поворот секущей плоскости Σ по часовой стрелке приводит к появлению эллипса, против часовой стрелки – гиперболы.

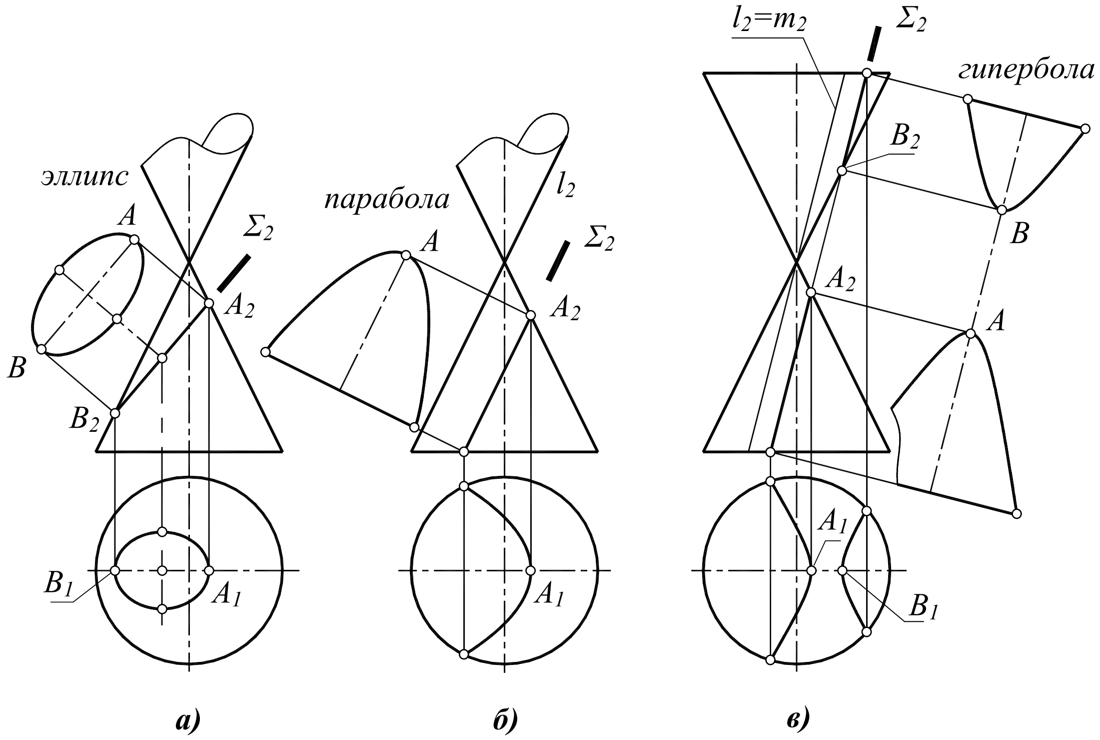

Рис. 7.5

Примечание. На рис. 7.5 показаны конические сечения, полученные на поверхности прямого кругового конуса. Но все виды конических сечений (эллипс, окружность, парабола, гипербола) могут быть найдены на конической поверхности второго порядка общего вида, заданной направляющей кривой второго порядка и вершиной.

7.4. Пересечение поверхности с прямой линией

Построение точек пересечения прямой линии с какой-либо поверхностью называют *первой позиционной задачей*. Напомним схему ее решения (см. лекцию 3).

1. Через прямую проводят вспомогательную плоскость. ***Это действие – самое главное! Если на чертеже не обозначена вспомогательная плоскость, то все последующие построения не имеют смысла.***

2. Находят линию пересечения вспомогательной плоскости с данной поверхностью.

3. Отмечают точки пересечения полученной линии с данной прямой. Эти точки являются искомыми.

Задача 1. *Построить точки пересечения прямой линии l с трехгранной призмой.*

На рис. 7.6 дана наглядная иллюстрация: прямая *l* заключена во вспомогательную плоскость *Σ*, пересекающую призму по ломаной линии *ABC*. Искомые точки *K*, *L* отмечены на пересечении прямой *l* с ломаной *ABC*.

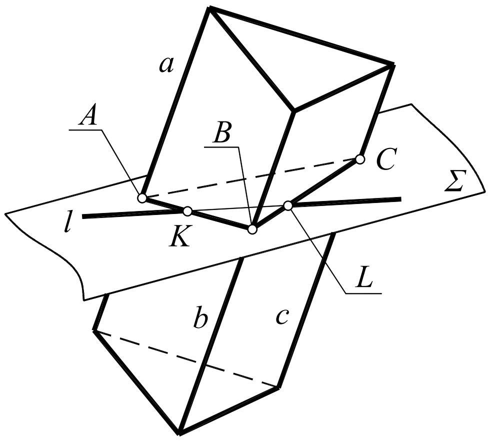

Рис. 7.6

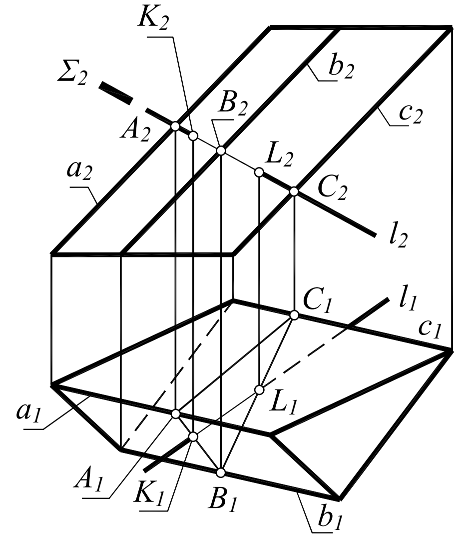

Рис. 7.7

Рассмотрим решение этой задачи на чертеже (рис. 7.7).

1. Через данную прямую *l* проводим вспомогательную фронтально-проецирующую плоскость *Σ*. ***Обязательно отмечаем эту плоскость на чертеже!***

2. Находим линию *ABC* пересечения плоскости *Σ* с призмой.

3. Отмечаем точки *K*, *L* пересечения линии *ABC* с данной прямой *l*. Эти точки являются искомыми точками пересечения прямой *l* с призмой. "Видимость" проекций прямой *l* определяем с помощью конкурирующих точек (см. лекцию 2, п. 2.2.6).

Задача 2. *Построить точки пересечения сферы с прямой линией.*

Для решения задачи надо заключить данную прямую во вспомогательную плоскость и построить линию пересечения сферы этой плоскостью, затем отметить искомые точки на пересечении этой линии и данной прямой.

Если прямая занимает *частное положение* (прямая уровня или проецирующая), то через нее может быть проведена вспомогательная плоскость уровня. Например, надо построить точки *A*, *B* пересечения горизонтали *h* со сферой (рис. 7.8). Через горизонталь *h* проводим вспомогательную горизонтальную плоскость уровня *Σ*. Линия пересечения сферы с плоскостью *Σ* (окружность *m*) проецируется на $П_1$ окружностью m_1. На пересечении окружности *m* и горизонтали *h* отмечаем искомые точки *A*, *B*.

На рис. 7.9 показано построение точек пересечения *проецирующей прямой j* со сферой. Проводим через *j* вспомогательную фронтальную плоскость уровня *Σ*, которая пересекает сферу по окружности *m*. На пересечении окружности *m* и проецирующей прямой *j* отмечаем искомые точки.

Пусть данная прямая *l* занимает *общее положение* (рис. 7.10). Требуется найти точки *A* и *B* пересечения сферы с прямой *l*.

Задача решается преобразованием прямой *l* общего положения в прямую уровня (способом замены плоскостей проекций). Проведем через прямую *l* горизонтально-проецирующую плоскость *Σ*. Введем в рассмотрение новую плоскость проекций $П_4$, параллельную плоскости *Σ*. На плоскости $П_4$ построим проекцию l_4 прямой *l* и проекцию m_4 окружности *m*, полученной в сечении заданной сферы плоскостью *Σ*. На пересечении проекций l_4 и m_4 отмечаем проекции A_4 и B_4 искомых точек. Затем с помощью линий связи переносим найденные точки в исходную систему координат $П_1$ / $П_2$. Задача решена.

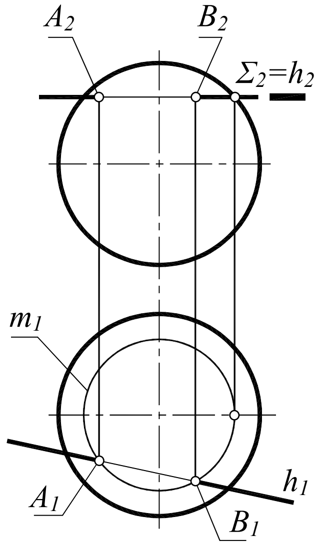

Рис. 7.8

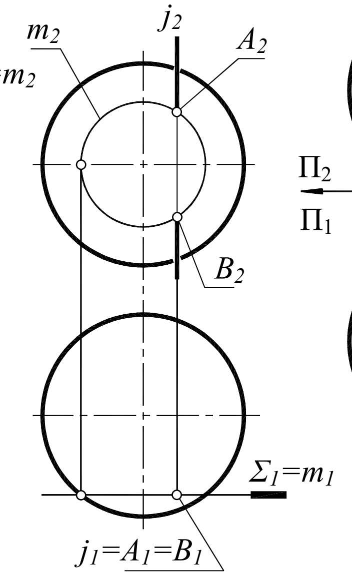

Рис. 7.9

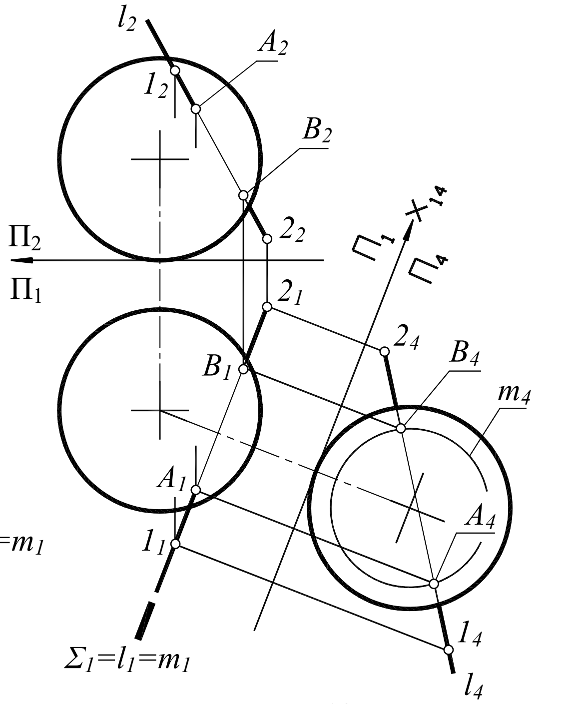

Рис. 7.10

Задача 3. *Построить точки пересечения конуса с прямой линией.*

На рис. 7.11 показан прямой круговой конус и прямая *m*. Требуется построить точки пересечения прямой *m* с поверхностью конуса.

В соответствии со схемой решения первой позиционной задачи надо через данную прямую провести вспомогательную секущую плоскость, построить линию разреза конуса этой плоскостью и отметить искомые точки на пересечении данной прямой с найденной линией разреза.

Для упрощения построений следует выбрать вспомогательную секущую плоскость, пересекающую конус по *графически простой линии* (то есть по прямой или окружности).

Среди множества плоскостей, проходящих через *m*, есть плоскость, которая проходит как через *m*, так и через вершину конуса *S*. Обозначим эту плоскость буквой Σ. Плоскость Σ, заданная на чертеже прямой *m* и вершиной конуса *S*, пересекает конус по двум прямым линиям (образующим конуса). Поэтому целесообразно выбрать плоскость $\Sigma(S, m)$ в качестве вспомогательной секущей плоскости.

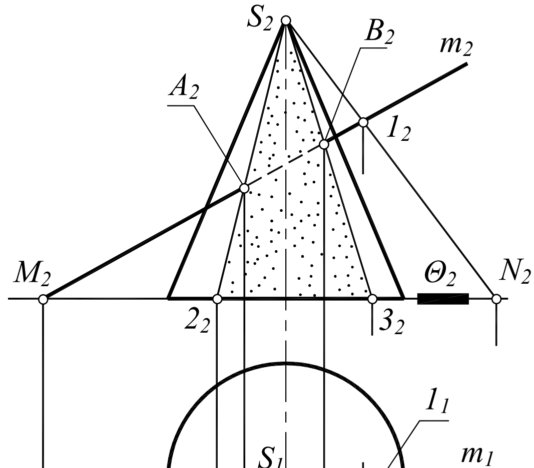

Рис. 7.11

Чтобы построить линию разреза конуса плоскостью Σ, проведем в плоскости Σ произвольную прямую *S-1* и найдем точку *N* пересечения этой прямой с плоскостью основания конуса Θ. Прямая *m* пересекается с плоскостью Θ в точке *M*. Поэтому прямая *MN* есть линия разреза плоскости основания конуса Θ секущей плоскостью Σ: $MN=\Theta\cap\Sigma$.

В точках *2* и *3* плоскость Σ пересекает круговое основание конуса. Так как Σ проходит через вершину S конуса, то линия разреза конуса плоскостью Σ – треугольник *S23*.

Искомые точки A, B пересечения конуса с прямой m определяются на пересечении линии *S23* с прямой m. Задача решена. Отметим, что решение было найдено с помощью вспомогательной секущей плоскости *общего положения*.

Правило. *Вспомогательную секущую плоскость рекомендуется выбирать таким образом, чтобы проекция линии пересечения ее с данной поверхностью была графически простой линией (прямой или окружностью). В зависимости от условия задачи такая плоскость может занимать как проецирующее, так и общее положение.*

Например, если в рассмотренной задаче (см. рис. 7.11) применить вспомогательную проецирующую плоскость, проходящую через m, то она “разрежет” конус либо по эллипсу, либо по гиперболе. Вычерчивание этих линий затруднит решение и сделает его менее точным.

7.5. Пересечение поверхности с кривой линией

Для построения точек пересечения кривой линии l с поверхностью Φ используется универсальная схема решения первой позиционной задачи (см. п. 7.4), но вместо вспомогательной секущей плоскости используется вспомогательная цилиндрическая поверхность Γ (“изогнутый лист”).

Рассмотрим схему решения задачи.

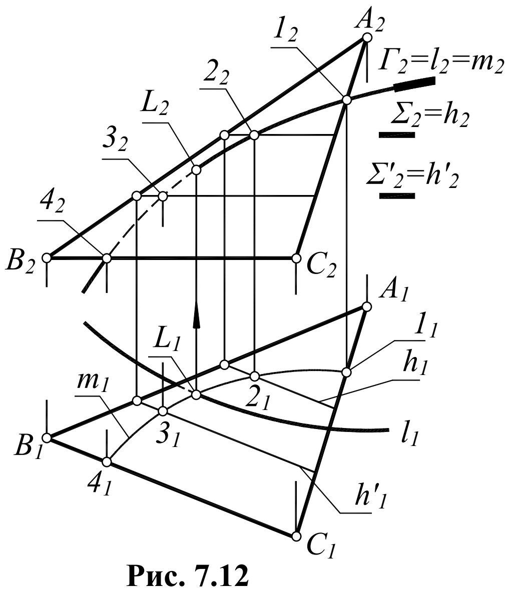

Рис. 7.12

1. Через данную кривую линию l проводят вспомогательную, обычно проецирующую, цилиндрическую поверхность Γ.

2. Находят линию m пересечения вспомогательной поверхности Γ с данной поверхностью Φ: $m=\Gamma\cap\Phi$.

3. Отмечают точки пересечения полученной линии m с данной кривой линией l.

Задача. *Построить точку L пересечения кривой l с плоскостью $\Delta(ABC)$.*

Проводим через кривую l фронтально-проецирующую цилиндрическую поверхность Γ (рис. 7.12). С помощью вспомогательных секущих плоскостей Σ, Σ' находим линию m=*1-2-3-4* пересечения цилиндрической поверхности Γ с заданной поверхностью $\Delta(ABC)$. Отмечаем точку L пересечения линии m с данной кривой линией l. Точка L – искомая. Видимость линии l на чертеже определяется обычным образом (с помощью конкурирующих точек).

Вопросы для повторения

1. Какая линия получается в пересечении многогранника с плоскостью?

2. Какая линия получается в пересечении сферы с плоскостью общего положения? Как изображается эта линия на плоскостях проекций?

3. Дать классификацию конических сечений. Как располагается секущая плоскость, пересекающая прямой круговой конус по эллипсу? По гиперболе? По параболе? По окружности? По двум прямым?