Лекция 5

СПОСОБЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЧЕРТЕЖА

Решение многих геометрических задач (как метрических, так и позиционных) упрощается, если исходные фигуры занимают частное положение относительно плоскостей проекций.

Пусть, например, требуется определить расстояние между параллельными прямыми *a*, *b*. Если эти прямые занимают общее положение (рис. 5.1, *а*), то для решения задачи требуется построить общий перпендикуляр к данным прямым, а затем способом прямоугольного треугольника определить его длину (см. п. 4.4, задача 9).

Если же эти прямые перпендикулярны к $П_1$ (рис. 5.1, *б*), то для решения задачи надо всего лишь измерить расстояние между горизонтальными проекциями a_1, b_1 данных прямых *a*, *b*.

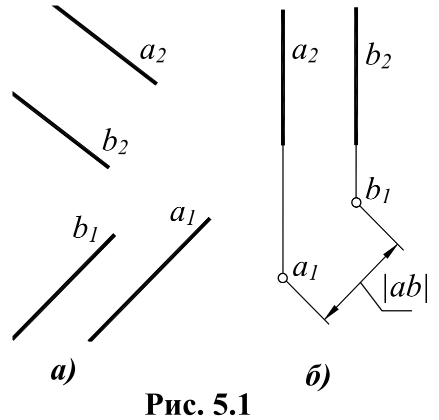


Рис. 5.1

Чертеж пространственных геометрических фигур можно преобразовать двумя способами: либо меняя положение системы координат относительно заданных неподвижных геометрических фигур, либо меняя положение фигур относительно заданной неподвижной системы координат. В обоих случаях цель преобразования состоит в том, чтобы какая-либо из заданных фигур заняла частное положение по отношению к одной из плоскостей проекций.

В настоящей лекции рассмотрены следующие способы.

1.*Способ замены плоскостей проекций*, основанный на изменении положения системы координат относительно заданных неподвижных геометрических фигур.

2.*Способ плоскопараллельного движения* и *способ вращения (вокруг проецирующей прямой или вокруг прямой уровня)*, основанные на перемещении фигур относительно неподвижной системы координат.

5.1. Способ замены плоскостей проекций

Сущность способа замены плоскостей проекций состоит в том, что *одна из двух плоскостей проекций ($П_1$ или $П_2$) заменяется новой плоскостью проекций $П_4$, которая располагается перпендикулярно к незаменяемой плоскости проекций и при этом располагается частным образом относительно заданной фигуры*. Образуется новая прямоугольная система плоскостей проекций, в которой заданная геометрическая фигура располагается частным образом относительно новой плоскости проекций.

Замена плоскости $П_2$

Даны плоскости проекций $П_1/П_2$ и построены проекции A_1, A_2 точки *A* (рис. 5.2). Плоскость $П_2$ перпендикулярна к плоскости $П_1$. Вместо плоскости $П_2$ введем в рассмотрение новую плоскость проекций $П_4$, также перпендикулярную к плоскости $П_1$. Построим ортогональную проекцию A_4 точки *A* на плоскость проекций $П_4$. Сравним чертежи в исходной системе координат $П_1/П_2$ и в “новой” системе координат $П_1/П_4$.

При переходе от системы координатных плоскостей $П_1/П_2$ к системе $П_1/П_4$ остались неизменными (*инвариантными*):

– положение точки *A*,

– положение плоскости проекций $П_1$,

– горизонтальная проекция A_1 точки *A*,

– высота z_A точки *A* (расстояние от точки *A* до плоскости $П_1$).

Выявленные инварианты позволяют на основании чертежа точки A в исходной системе координат $П_1/П_2$ построить чертёж точки A в новой системе координат $П_1/П_4$.

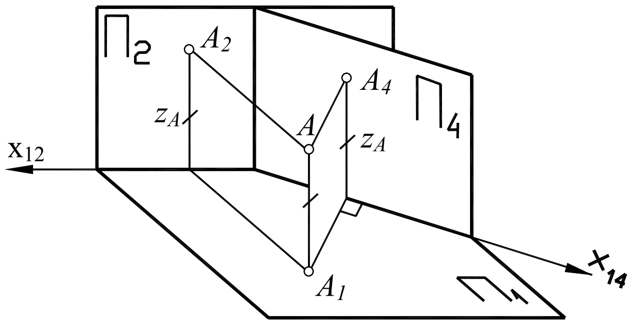


Рис. 5.2

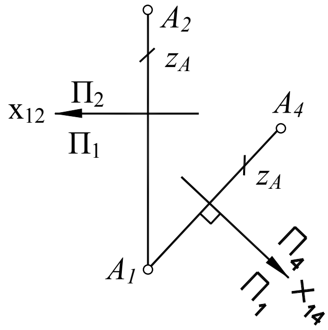


Рис. 5.3

На рис. 5.3 дан чертеж точки A как в исходной системе $П_1/П_2$, так и в новой системе координат $П_1/П_4$. Особо отмечено, что высота z_A точки A не изменилась при переходе от системы координат $П_1/П_2$ к системе $П_1/П_4$: $|A_2\text{-}x_{12}|=|A_4\text{-}x_{14}|$ (почему?).

Новая ось координат x_{14} определяется как линия пересечения незаменяемой плоскости проекций $П_1$ с новой плоскостью проекций $П_4$. Линия связи A_1A_4 на новом чертеже (в системе координат $П_1/П_4$) перпендикулярна новой оси координат x_{14}.

Чтобы на новой плоскости проекций $П_4$ найти проекцию A_4 точки A, надо измерить расстояние от A_2 до x_{12} на плоскости $П_2$ (высоту z_A точки A) и отложить это расстояние вдоль линии связи от новой оси координат x_{14} до искомой проекции A_4 точки A.

В результате выполненных построений получен чертеж точки A в “новой” системе координат $П_1/П_4$ (см. рис. 5.3).

<u>Замена плоскости $П_1$</u>

В системе координатных плоскостей $П_1/П_2$ дана точка A и построены ее проекции A_1, A_2. Вместо плоскости $П_1$ введем в рассмотрение новую плоскость проекций $П_4$, перпендикулярную $П_2$ (рис. 5.4). Построим ортогональную проекцию A_4 точки A на новую плоскость проекций. Сравним чертежи в системах координат $П_1/П_2$ и $П_4/П_2$.

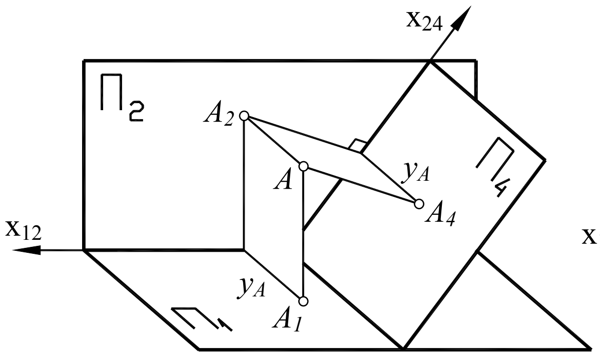


Рис. 5.4

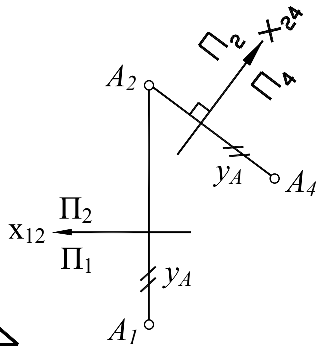


Рис. 5.5

При переходе от системы координатных плоскостей $П_1/П_2$ к системе координат $П_4/П_2$ остались неизменными (*инвариантными*):

– положение точки A,

– положение плоскости проекций $П_2$,

– фронтальная проекция A_2 точки A,

– глубина y_A точки A (*расстояние от точки A до плоскости $П_2$*).

Выявленные инварианты позволяют от чертежа точки в “старой” системе координат $П_1/П_2$ перейти к чертёжу точки в новой системе координат $П_2/П_4$ (рис. 5.5).

На рис. 5.5 дан чертеж точки *A* в исходной системе координат Π_1/Π_2 и в новой системе Π_2/Π_4. Особо отмечено, что глубина y_A точки *A* (расстояние от оси x_{12} до горизонтальной проекции A_1 точки *A*) не изменилась при переходе от системы координат Π_1/Π_2 к системе Π_2/Π_4: $|A_1\text{-}x_{12}|=|A_4\text{-}x_{24}|$ (почему?).

Новая ось координат x_{24} определяется как линия пересечения незаменяемой плоскости проекций Π_2 с новой плоскостью проекций Π_4. Линия связи A_2A_4 на новом чертеже (в системе координат Π_2/Π_4) перпендикулярна новой оси координат x_{24}.

Чтобы на новой плоскости проекций Π_4 найти проекцию A_4 точки *A*, надо измерить расстояние от A_1 до x_{12} на плоскости Π_1 (глубину y_A точки *A*) и отложить это расстояние вдоль линии связи от новой оси координат x_{24} до искомой проекции A_4 точки *A*.

В результате выполненных построений получен чертеж точки *A* в "новой" системе координат Π_2/Π_4 (см. рис. 5.5).

Сформулируем основное правило преобразования чертежа способом замены плоскостей проекций.

Правило. *Если фронтальная плоскость проекций Π_2 заменяется на новую плоскость проекций Π_4, то высота z_A точки A (то есть расстояние от точки A до плоскости Π_1) в новой системе координат Π_1/Π_4 не меняется, так как горизонтальная плоскость проекций Π_1 остается неизменной.*

Если горизонтальная плоскость проекций Π_1 заменяется на новую плоскость проекций Π_4, то глубина y_A точки A (то есть расстояние от точки A до плоскости Π_2) в новой системе координат Π_2/Π_4 не меняется, так как фронтальная плоскость проекций Π_2 остается неизменной.

Это правило можно не вполне строго, но более кратко сформулировать следующим образом, более удобным для запоминания: *координата точки на новой плоскости проекций равна координате этой же точки на заменяемой плоскости проекций.* Здесь под координатой точки следует понимать расстояние от ее проекции до оси координат (как на новой, так и на заменяемой плоскостях проекций).

5.2. Основные задачи, решаемые способом замены плоскостей проекций

Способом замены плоскостей проекций решают следующие четыре задачи:

– преобразование прямой общего положения в прямую уровня,
– преобразование прямой уровня в проецирующую прямую,
– преобразование плоскости общего положения в проецирующую плоскость,
– преобразование проецирующей плоскости в плоскость уровня.

Последовательно рассмотрим каждую из перечисленных задач.

5.2.1. Преобразование прямой общего положения в прямую уровня

Чтобы преобразовать прямую общего положения *AB* в прямую уровня, надо одну из плоскостей проекций (например, Π_2) заменить новой плоскостью проекций Π_4, расположив ее перпендикулярно незаменяемой плоскости проекций Π_1 и параллельно данной прямой *AB* (рис. 5.6, *а*). Тогда в новой системе координат Π_1/Π_4 прямая *AB* займет положение линии уровня относительно новой плоскости проекций Π_4. Символическая запись преобразования выглядит следующим образом:

$$\Pi_1/\Pi_2 \rightarrow \Pi_1/\Pi_4,\ \text{где}\ \Pi_4 || AB,\ \Pi_4 \perp \Pi_1.$$

Чтобы выполнить такое преобразование, надо новую ось координат x_{14} провести параллельно горизонтальной проекции A_1B_1 данной прямой *AB* (см. рис. 5.6, *а*). Расстояние между x_{14} и A_1B_1 выбирается произвольно.

Проекции A_4, B_4 концов отрезка AB на новой плоскости проекций $П_4$ определяются в соответствии с основным правилом замены плоскостей проекций: *координата любой точки на новой плоскости проекций (на $П_4$) равна координате этой же точки на заменяемой плоскости проекций (в данном примере – на $П_2$).*

В новой системе координат $П_1/П_4$ прямая AB занимает положение линии уровня ($AB||П_4$), поэтому на плоскости $П_4$ отрезок AB и угол α его наклона к $П_1$ изображаются в натуральную величину (см. рис. 5.6, *а*). Таким образом, способ замены плоскостей проекций может быть использован для определения истинной длины отрезка прямой общего положения.

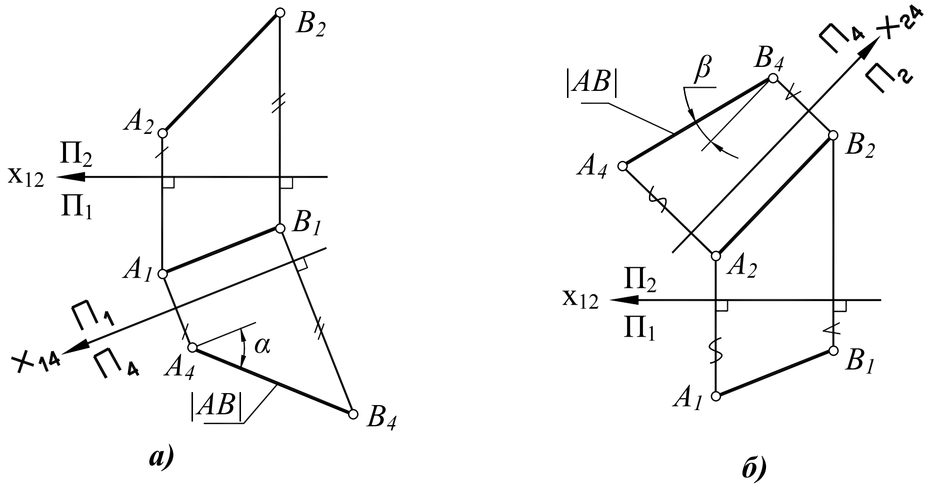


Рис. 5.6

Плоскости проекций $П_1$ и $П_2$ вполне “равноправны”, поэтому для преобразования прямой общего положения в линию уровня можно заменять не плоскость $П_2$ (как показано на рис. 5.6, *а*), а плоскость $П_1$. Заменим плоскость $П_1$ новой плоскостью проекций $П_4$, расположив ее перпендикулярно плоскости $П_2$ и параллельно данной прямой AB. Символическая запись преобразования выглядит следующим образом:

$$П_1/П_2 \rightarrow П_4/П_2 \text{, где } П_4||AB,\ П_4 \perp П_2.$$

Такое преобразование показано на рис. 5.6, *б*, где новая ось координат x_{24} проведена параллельно фронтальной проекции A_2B_2 прямой AB. В новой системе координат $П_2/П_4$ прямая AB занимает положение линии уровня ($AB||П_4$), поэтому на плоскости проекций $П_4$ отрезок AB и угол β его наклона к $П_2$ изображены в натуральную величину.

Рекомендуется самостоятельно выполнить два варианта замены плоскостей проекций, показанные на рис. 5.6, и убедиться, что величина $|AB|=A_4B_4$ не зависит от выбора заменяемой плоскости проекций.

5.2.2. Преобразование прямой уровня в проецирующую прямую

Линия уровня – это прямая, параллельная какой-либо плоскости проекций. Пусть, например, дана фронталь $f=AB$ (рис. 5.7, *а*). Требуется преобразовать чертеж так, чтобы в новой системе координат фронталь $f=AB$ заняла проецирующее положение. Для этого надо ввести в рассмотрение новую плоскость проекций $П_4$, установив ее перпендикулярно к фронтали. Фронталь параллельна плоскости $П_2$, поэтому новая плоскость проекций $П_4$, перпендикулярная к $f=AB$, будет располагаться перпендикулярно к $П_2$. В новой системе взаимно перпендикулярных плоскостей $П_4/П_2$ фронталь $f=AB$ становится проецирующей прямой.

Символическая запись преобразования выглядит следующим образом:

$$П_1/П_2 \rightarrow П_4/П_2 \text{, где } П_4 \perp f(AB).$$

Преобразование показано на рис. 5.7, *а*, где новая ось координат x_{24} проведена перпендикулярно к фронтальной проекции f_2 фронтали. В новой системе координат $П_2/П_4$ прямая $f=AB$ становится проецирующей прямой ($AB \perp П_4$), поэтому на $П_4$ вся прямая $f=AB$ изображается точкой: $f_4=A_4=B_4$. На чертеже особо отмечено, что координата точки $A_4=B_4$ на новой плоскости проекций $П_4$ равна координате точек A_1, B_1 на заменяемой плоскости проекций $П_1$.

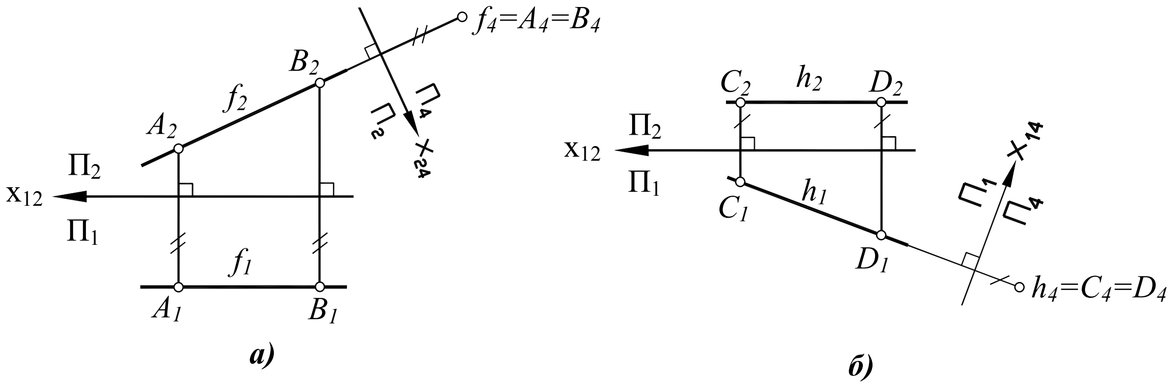


Рис. 5.7

Пусть дана горизонталь $h=CD$ (рис. 5.7, *б*). Для преобразования горизонтали в проецирующую прямую надо ввести в рассмотрение новую плоскость проекций $П_4$, установив ее перпендикулярно к горизонтали. Горизонталь параллельна плоскости $П_1$, поэтому новая плоскость проекций $П_4$, перпендикулярная к $h=CD$, будет располагаться перпендикулярно к $П_1$. В новой системе взаимно перпендикулярных плоскостей $П_1/П_4$ горизонталь $h=CD$ становится проецирующей прямой.

Символическая запись преобразования выглядит следующим образом:

$$П_1/П_2 \rightarrow П_1/П_4, \text{ где } П_4 \perp h(CD).$$

Преобразование показано на рис. 5.7, *б*, где новая ось координат x_{14} проведена перпендикулярно к горизонтальной проекции h_1 горизонтали. В новой системе координат $П_1/П_4$ прямая $h=CD$ стала проецирующей прямой ($CD \perp П_4$), поэтому на $П_4$ вся прямая $h=CD$ изображается точкой: $h_4=C_4=D_4$. Координата точки $C_4=D_4$ равна координате точек C_2, D_2 на заменяемой плоскости $П_2$.

Примечание. *Для преобразования прямой общего положения в проецирующую прямую необходимо выполнить две последовательные замены плоскостей проекций. В результате первой замены прямая общего положения преобразуется в прямую уровня. В результате второй замены прямая уровня преобразуется в проецирующую прямую.*

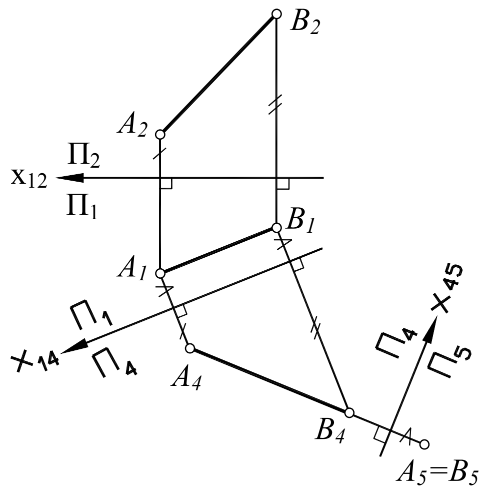


Рис. 5.8

Например, на рис. 5.8 прямая общего положения AB преобразована в проецирующую прямую. Для этого потребовалось выполнить две последовательные замены плоскостей проекций. Первая замена плоскостей проекций: $П_1/П_2 \rightarrow П_1/П_4$, где $П_4 || AB$, $П_4 \perp П_1$. В системе координат $П_1/П_4$ прямая AB стала прямой уровня ($AB || П_4$). Вторая замена плоскостей проекций: $П_1/П_4 \rightarrow П_5/П_4$, где $П_5 \perp AB$. В системе координат $П_5/П_4$ прямая AB стала проецирующей прямой ($AB \perp П_5$).

5.2.3. Преобразование плоскости общего положения в проецирующую плоскость

В системе координат $П_1/П_2$ задана плоскость общего положения $\Sigma(ABC)$. Проведем в плоскости Σ какую-нибудь линию уровня, например, горизонталь h (рис. 5.9, *а*). Введем в рассмотрение новую плоскость проекций $П_4$, расположив ее перпендикулярно горизонтали h:

$$П_1/П_2 \rightarrow П_1/П_4, \text{ где } П_4 \perp h.$$

При этом не только горизонталь, но вся плоскость Σ располагается перпендикулярно плоскости $П_4$ (см. четвертый признак перпендикулярности плоскостей, п. 4.1). Следовательно, в новой системе координат $П_1/П_4$ плоскость общего положения Σ становится проецирующей плоскостью ($\Sigma \perp П_4$). На плоскости $П_4$ проекция всей плоскости Σ вырождается в прямую линию $A_4B_4C_4$ (см. рис. 5.9, *а*).

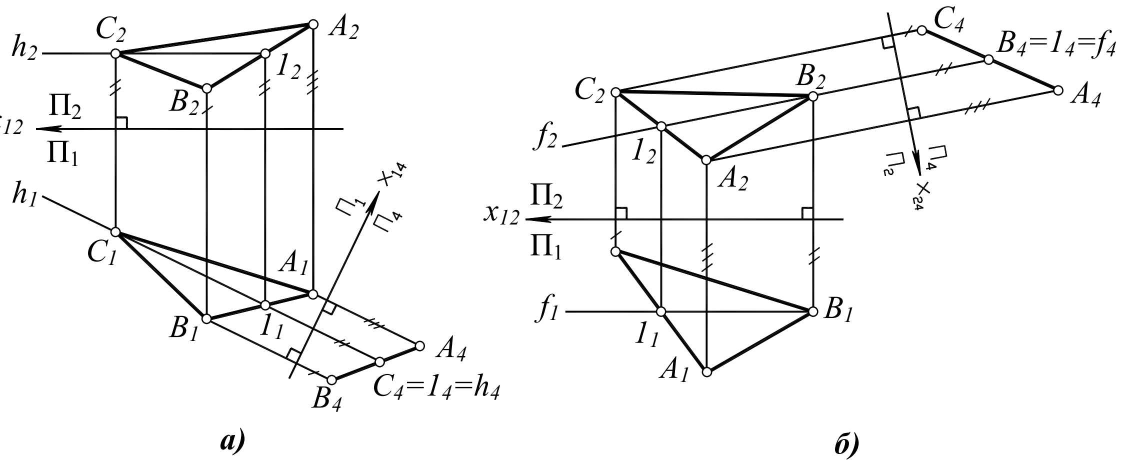


Рис. 5.9

Новую плоскость проекций можно расположить перпендикулярно не горизонтали (как на рис. 5.9, *а*), а перпендикулярно фронтали f, лежащей в плоскости Σ (рис. 5.9, *б*):

$$П_1/П_2 \rightarrow П_4/П_2, \text{ где } П_4 \perp f.$$

Фронталь f, лежащая в $\Sigma(ABC)$, перпендикулярна к плоскости $П_4$. Следовательно, в новой системе координат $П_4/П_2$ плоскость общего положения Σ становится проецирующей плоскостью ($\Sigma \perp П_4$). Поэтому на плоскости $П_4$ проекция всей плоскости $\Sigma(ABC)$ вырождается в прямую линию $A_4B_4C_4$ (см. рис. 5.9, *б*).

Таким образом, чтобы преобразовать плоскость общего положения в проецирующую плоскость, требуется выполнить одну замену плоскостей проекций.

5.2.4. Преобразование проецирующей плоскости в плоскость уровня

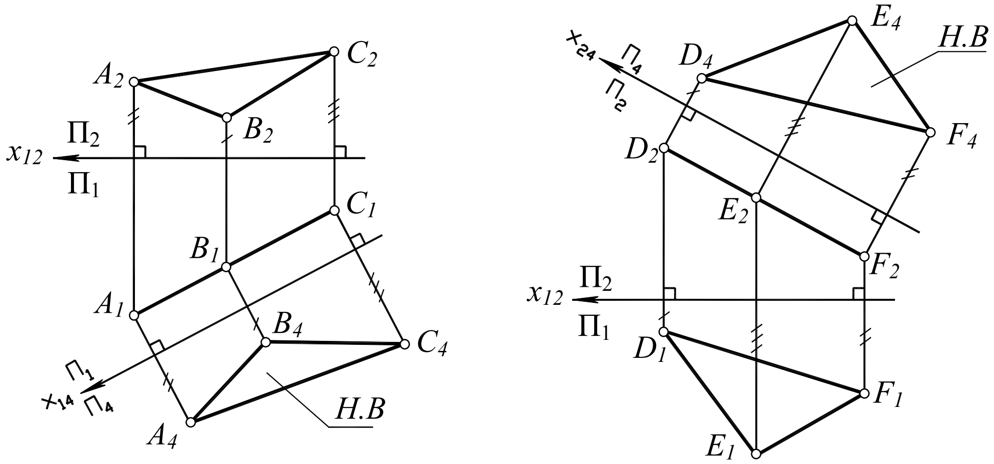
Чтобы преобразовать проецирующую плоскость в плоскость уровня, надо новую плоскость проекций разместить параллельно данной проецирующей плоскости.

Пусть требуется преобразовать горизонтально-проецирующую плоскость $\Sigma(ABC)$ в плоскость уровня (рис. 5.10, *а*). Заменяем плоскость $П_2$ плоскостью $П_4$, расположив её параллельно данной плоскости $\Sigma(ABC)$: $П_1/П_2 \rightarrow П_1/П_4$, где $П_4 || \Sigma$.

В новой системе координат $П_1/П_4$ плоскость $\Sigma(ABC)$ стала плоскостью уровня относительно новой плоскости проекций $П_4$: $\Sigma || П_4$. Поэтому проекция $A_4B_4C_4$ представляет собой натуральную величину треугольника ABC (см. рис. 5.10, *а*).

Чтобы преобразовать фронтально-проецирующую плоскость $Г(DEF)$ в плоскость уровня (рис. 5.10, *б*), заменяем плоскость $П_1$ плоскостью $П_4$, расположив плоскость $П_4$ параллельно данной плоскости: $П_1/П_2 \rightarrow П_4/П_2$, где $П_4 || Г(DEF)$.

В новой системе координат Π_4/Π_2 плоскость $\Gamma(DEF)$ стала плоскостью уровня относительно новой плоскости проекций Π_4: $\Gamma||\Pi_4$. Поэтому проекция $D_4E_4F_4$ представляет собой натуральную величину треугольника DEF (см. рис. 5.10, *б*).



а) ***б)***

Рис. 5.10

Таким образом, чтобы преобразовать проецирующую плоскость в плоскость уровня, требуется выполнить одну замену плоскостей проекций.

Примечание. *Для преобразования плоскости общего положения в плоскость уровня необходимо выполнить две последовательные замены плоскостей проекций. В результате первой замены плоскость общего положения преобразуется в проецирующую плоскость. В результате второй замены проецирующая плоскость преобразуется в плоскость уровня.*

Например, на рис. 5.11 показано преобразование плоскости общего положения $\Sigma(ABC)$ в плоскость уровня. Для этого потребовалось выполнить две последовательные замены плоскостей проекций.

Первая замена плоскостей проекций: $\Pi_1/\Pi_2 \rightarrow \Pi_1/\Pi_4$, где $\Pi_4 \perp h$. Заменяется плоскость Π_2, поэтому координаты точек A, B, C переносятся с плоскости Π_2 на новую плоскость проекций Π_4 (например, координата a точки A перенесена с Π_2 на Π_4). В новой системе координат Π_1/Π_4 плоскость $\Sigma(ABC)$ стала занимать проецирующее положение ($\Sigma \perp \Pi_4$).

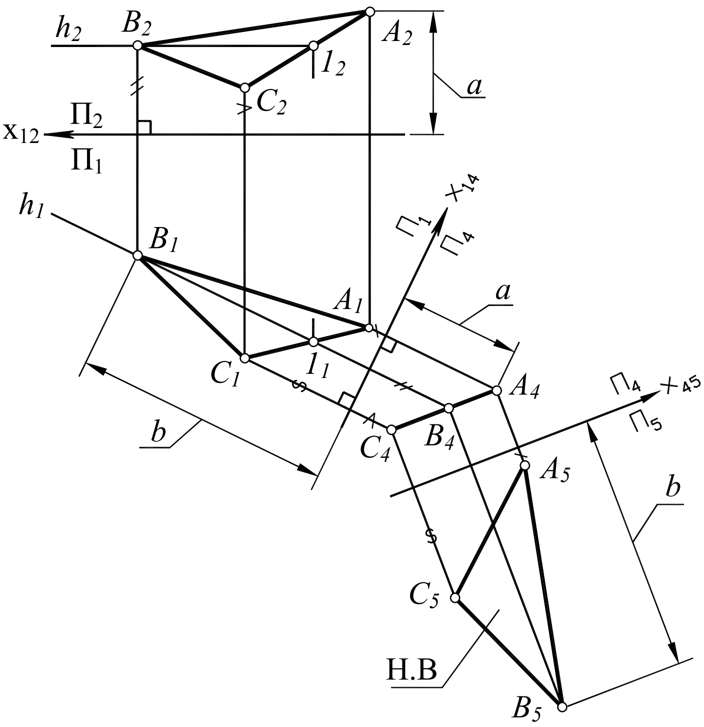


Рис. 5.11

Вторая замена плоскостей проекций: $\Pi_1/\Pi_4 \rightarrow \Pi_5/\Pi_4$, где $\Pi_5||\Sigma$. Заменяется плоскость Π_1, поэтому координаты точек A, B, C переносятся с плоскости Π_1 на новую плоскость проекций Π_5 (например, координата b точки B перенесена с Π_1 на Π_5). В новой системе координат Π_5/Π_4 плоскость

$\Sigma(ABC)$ стала плоскостью уровня ($\Sigma||\Pi_5$), поэтому на плоскости Π_5 треугольник ABC изображен в натуральную величину.

Таким образом, способ замены плоскостей проекций может быть использован для определения истинной формы геометрической фигуры, лежащей в плоскости общего положения.

5.3. Примеры решения задач способом замены плоскостей проекций

Задача 1. *Определить истинную длину отрезка AB и углы его наклона к плоскостям проекций (рис. 5.12, а). Решить задачу двумя способами: способом замены плоскостей проекций и способом прямоугольного треугольника. Решения сравнить и проверить числовым расчетом с помощью теоремы Пифагора* ($AB^2=\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2$).

Решение способом замены плоскостей проекций (рис. 5.12, *б*)

Вместо плоскости Π_2 введем в рассмотрение новую плоскость проекций Π_4, расположив ее параллельно данному отрезку AB и перпендикулярно плоскости Π_1:

$$\Pi_2/\Pi_1 \rightarrow \Pi_4/\Pi_1.$$

Отрезок AB и угол его наклона к горизонтальной плоскости проекций (угол α) проецируются на новую плоскость проекций Π_4 в натуральную величину.

Чтобы определить угол наклона отрезка к фронтальной плоскости проекций Π_2, введем в рассмотрение новую плоскость проекций Π_5, разместив ее параллельно отрезку AB и перпендикулярно плоскости Π_2: $\Pi_2/\Pi_1 \rightarrow \Pi_2/\Pi_5$ (см. рис. 5.12, *б*). Отрезок AB и угол его наклона к фронтальной плоскости проекций (угол β) проецируются на новую плоскость проекций Π_5 в натуральную величину.

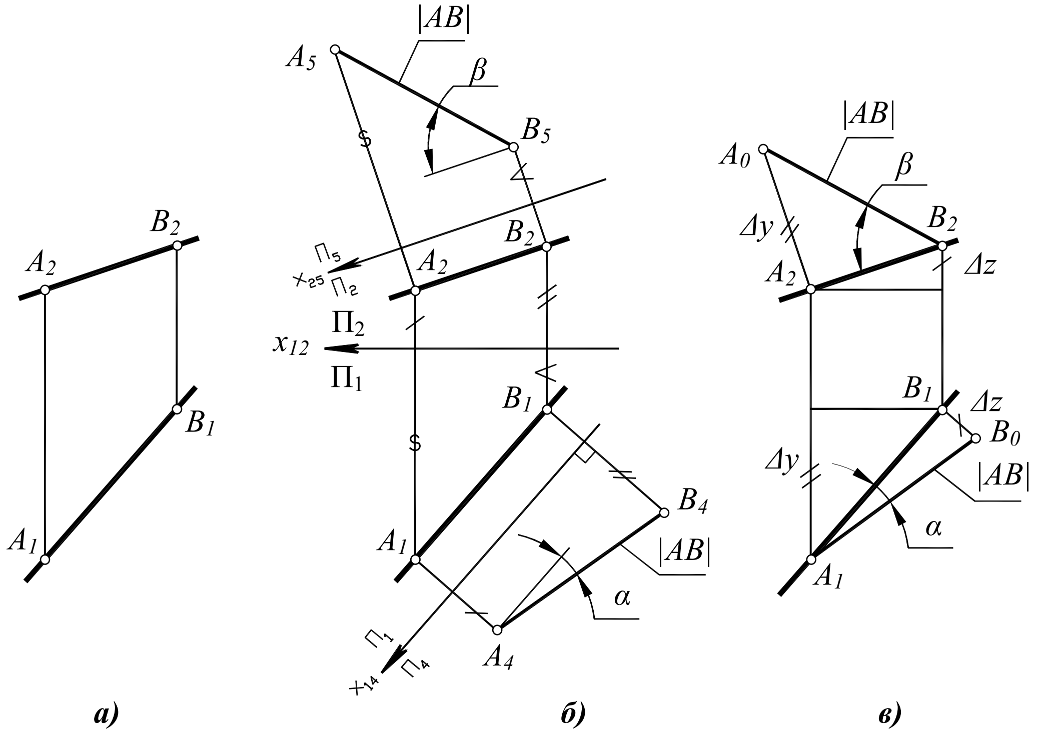


Рис. 5.12

Решение способом прямоугольного треугольника (рис. 5.12, *в*)

Для определения истинной длины отрезка начертим вспомогательный прямоугольный треугольник $A_1B_1B_0$ (см. п. 2.2.2). Один его катет равен горизонтальной проекции A_1B_1 отрезка, другой катет равен разности высот Δz концов отрезка. Гипотенуза этого треугольника равна истинной длине отрезка *AB*. Угол *α*, противолежащий катету Δz, равен истинному углу наклона отрезка к горизонтальной плоскости проекций.

Чтобы определить угол наклона отрезка к плоскости проекций Π_2, построим еще один вспомогательный прямоугольный треугольник $A_2B_2A_0$ (см. рис. 5.12, *в*). Один его катет равен фронтальной проекции A_2B_2 отрезка *AB*, другой катет равен разности глубин Δy концов отрезка. Гипотенуза этого треугольника равна истинной длине отрезка *AB*. Угол *β*, противолежащий катету Δy, равен истинному углу наклона отрезка к фронтальной плоскости проекций.

Проверка решения по теореме Пифагора

На чертеже измеряем разность координат Δx, Δy, Δz концов *A*, *B* отрезка и по формуле $AB^2=\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2$ вычисляем его длину. Углы наклона отрезка к плоскостям проекций определяются из тригонометрических соотношений: $\sin\alpha=\Delta z/|AB|$, $\sin\beta=\Delta y/|AB|$. Если задача решена правильно, то все три способа дадут одинаковый результат.

Задача 2. *На прямой l общего положения отложить от точки A отрезок AB длиной 25 мм* (рис. 5.13, *а*).

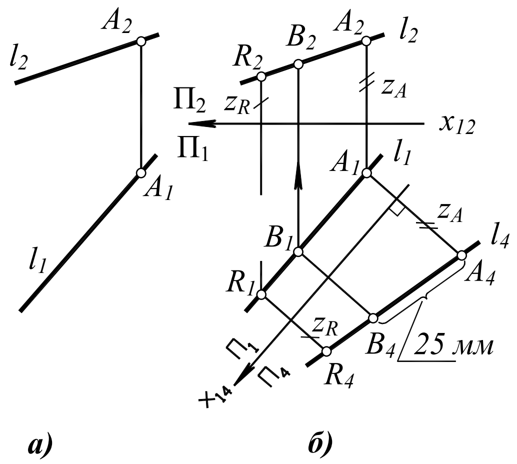


Рис. 5.13

Отметив на прямой *l* произвольную точку *R*, преобразуем прямую *l* в прямую уровня. Для этого вместо плоскости Π_2 введем в рассмотрение новую плоскость проекций Π_4, расположив ее параллельно прямой *l* и перпендикулярно плоскости Π_1 (рис. 5.13, *б*): $\Pi_2/\Pi_1 \rightarrow \Pi_4/\Pi_1$. Любой отрезок прямой *l* проецируется на новую плоскость проекций Π_4 в натуральную величину. Поэтому откладываем от точки A_4 вдоль l_4 заданное расстояние *25 мм*, отмечаем точку B_4 и “возвращаем” ее с помощью линий связи в исходную систему координат Π_2/Π_1.

Задача имеет два решения, так как на прямой *l* от точки *A* можно отложить отрезок *25 мм* в двух направлениях.

Задача 3. *Построить проекции и определить длину перпендикуляра, опущенного из точки K на прямую a* (рис. 5.14).

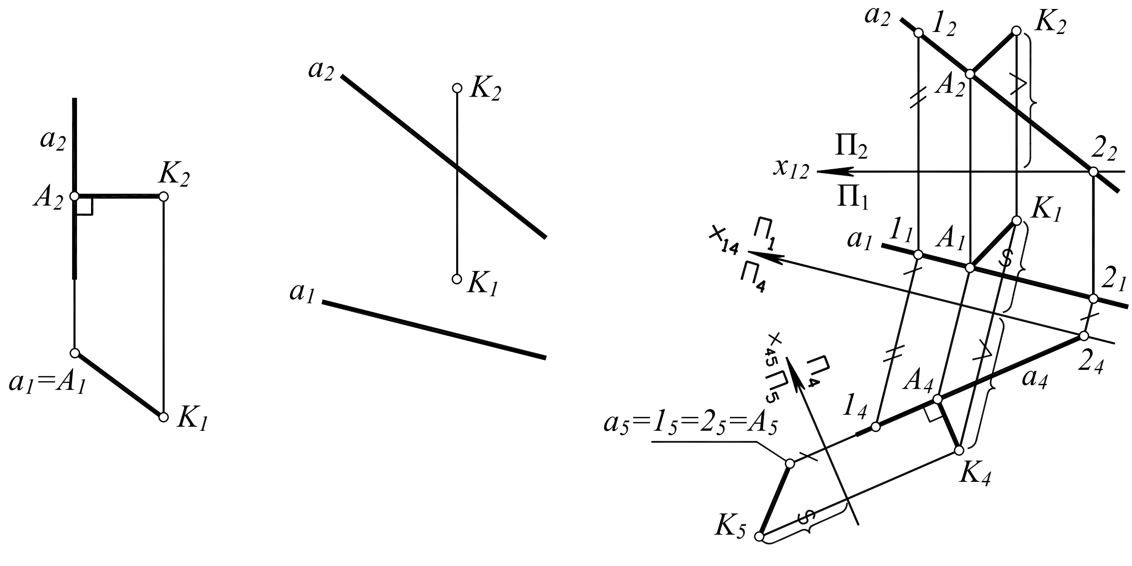
Если прямая *a* занимает проецирующее положение (например, $a \perp \Pi_1$), то задача решается безо всяких затруднений, поскольку в этом случае взаимно перпендикулярные прямые *KA* и *a* изображаются на Π_2 сторонами прямого угла, а горизонтальная проекция K_1A_1 перпендикуляра *KA* равна его истинной длине (почему?).

Если же прямая *a* занимает общее положение (рис. 5.14, *б*), то надо предварительно преобразовать данную прямую в проецирующую (то есть чертеж, показанный на рис. 5.14, *б*, преобразовать к виду, показанному на рис. 5.14, *а*). Для этого необходимо выполнить две последовательные замены плоскостей проекций. В результате первой замены прямая общего положения преобразуется в прямую уровня. В результате второй замены прямая уровня преобразуется в проецирующую прямую.

Первая замена плоскостей проекций. Вводим новую плоскость проекций Π_4, параллельную прямой *a* и перпендикулярную плоскости проекций Π_1 (рис. 5.14, *в*). В новой системе координат Π_1/Π_4 прямая *a* становится прямой уровня.

Вторая замена плоскостей проекций. Вводим новую плоскость проекций Π_5, перпендикулярную прямой *a* (см. рис. 5.14, *в*). В новой системе координат Π_4/Π_5 прямая *a* становится проецирующей прямой.

Далее задача решается так, как показано на чертеже рис. 5.14, *а*. Точку *А* (основание перпендикуляра, опущенного из точки *К* на прямую *а*), построенную в системе координат $П_4/П_5$, “возвращаем” в исходную систему координат $П_2/П_1$ (см. рис. 5.14, *в*).

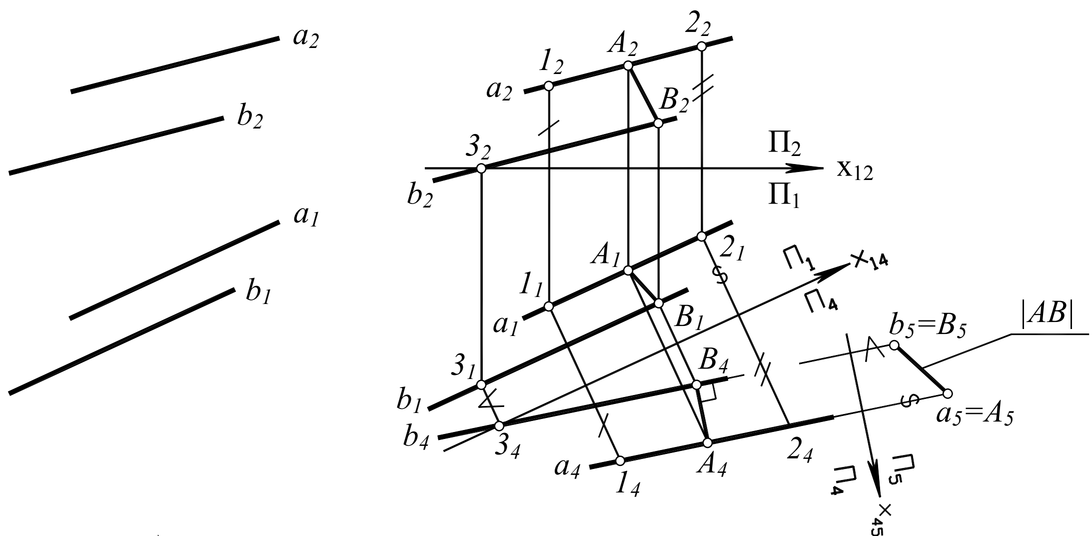


а) **б)** **в)**

Рис. 5.14

Задача 4. *Определить расстояние |AB| между параллельными прямыми a и b (рис. 5.15, а). Построить проекции отрезка AB в исходной системе координат $П_2/П_1$.*

Преобразуем данные параллельные прямые *a*, *b* общего положения в проецирующие прямые. Для этого надо выполнить две замены плоскостей проекций.



а) **б)**

Рис. 5.15

<u>Первая замена плоскостей проекций.</u> Вводим новую плоскость проекций $П_4$, параллельную прямым *a*, *b* и перпендикулярную плоскости проекций $П_1$ (рис. 5.15, *б*). В новой системе координат $П_1/П_4$ прямые *a*, *b* становятся прямыми уровня.

Вторая замена плоскостей проекций. Вводим новую плоскость проекций $П_5$, перпендикулярную прямым a, b. В новой системе координат $П_4/П_5$ прямые a, b становятся проецирующими прямыми.

Для окончательного решения задачи надо всего лишь измерить расстояние между проекциями a_5, b_5 данных прямых a, b (как показано на рис. 5.1). Отрезок AB общего перпендикуляра к данным прямым “возвращаем” с помощью линий связи в исходную систему координат $П_2/П_1$ (см. рис. 5.15, *б*).

Задача 5. *Определить расстояние AK от точки A до плоскости Σ(BCD) общего положения* (рис. 5.16, *а*). *Построить отрезок AK в исходной системе координат.*

Преобразуем чертеж так, чтобы плоскость общего положения $Σ(BCD)$ заняла проецирующее положение. Для этого вводим в рассмотрение новую плоскость проекций $П_4$, расположив ее перпендикулярно плоскости $Σ(BCD)$ (рис. 5.16, *б*).

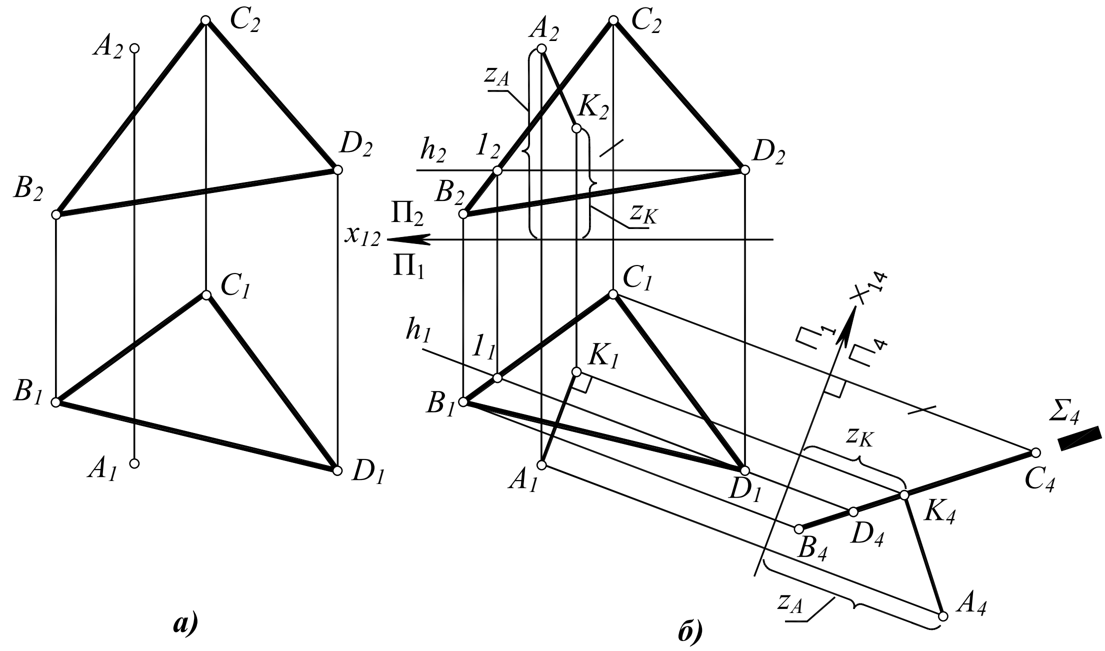


Рис. 5.16

В новой системе координат $П_1/П_4$ проекция $B_4C_4D_4$ плоскости $Σ(BCD)$ вырождается в прямую линию. Из точки A_4 опускаем перпендикуляр A_4K_4 на вырожденную проекцию $B_4C_4D_4$ плоскости $Σ(BCD)$. Искомое расстояние от точки A до плоскости $Σ$ равно длине отрезка A_4K_4.

Заметим, что в новой системе координат $П_1/П_4$ прямая AK является прямой уровня (прямая AK параллельна плоскости $П_4$). С учетом этого находим проекцию K_1 точки K, а затем “возвращаем” отрезок AK в исходную систему координат $П_1/П_2$.

Задача 6. *Определить истинную форму параллелограмма ABCD, лежащего в плоскости Σ общего положения* (рис. 5. 17).

Для решения задачи надо преобразовать чертеж так, чтобы плоскость общего положения $Σ(ABCD)$ стала плоскостью уровня. Для этого требуется выполнить две последовательные замены плоскостей проекций. В результате первой замены плоскость общего положения $Σ(ABCD)$ преобразуется в проецирующую плоскость. В результате второй замены проецирующая плоскость преобразуется в плоскость уровня.

Первая замена плоскостей проекций

Вводим в рассмотрение новую плоскость проекций $П_4$, расположив ее перпендикулярно плоскости $Σ(ABCD)$. Вместо чертежа в системе координат $П_2/П_1$ получаем чертеж в новой системе координат $П_4/П_1$. Напомним основное правило: координата точки на новой плоскости проекций $П_4$ равна координате этой точки на заменяемой плоскости проекций $П_2$. Например, координата точки C на плоскости проекций $П_4$ равна координате z_C точки C на плоскости $П_2$.

В новой системе координат $П_4/П_1$ плоскость $\Sigma(ABCD)$ заняла проецирующее положение. Проекция параллелограмма $A_4B_4C_4D_4$ на плоскость $П_4$ выродилась в прямую линию (см. рис. 5.17).

<u>Вторая замена плоскостей проекций</u>

Вместо плоскости $П_1$ вводим в рассмотрение новую плоскость проекций $П_5$, расположив ее параллельно плоскости $\Sigma(ABCD)$. Получаем чертеж в новой системе координат $П_4/П_5$. Согласно основному правилу (см. п. 5.1), координата любой точки на новой плоскости проекций $П_5$ равна координате этой же точки на заменяемой плоскости проекций $П_1$. Например, координата точки D_5 на плоскости проекций $П_5$ равна координате δ_D точки D_1 на плоскости $П_1$. Проекция $A_5B_5C_5D_5$ – натуральная величина (Н.В) параллелограмма $ABCD$ (см. рис. 5.17).

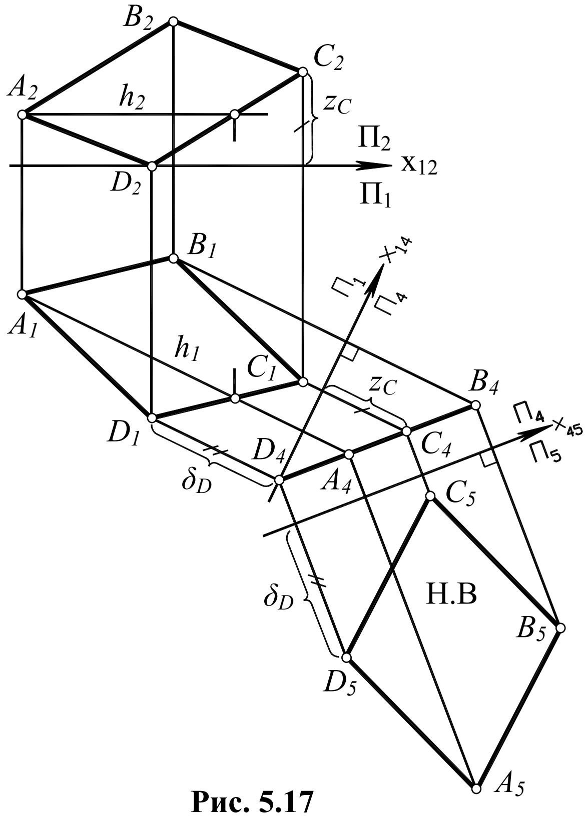


Рис. 5.17

5.4. Способ плоскопараллельного движения

Способом плоскопараллельного движения данная геометрическая фигура приводится в частное положение в результате ее перемещения в пространстве относительно неподвижной системы плоскостей проекций.

Определение. *Движение фигуры в пространстве называется плоскопараллельным, если все ее точки перемещаются в параллельных плоскостях.*

Будем рассматривать только такие плоскопараллельные движения фигуры относительно плоскостей проекций, когда все точки данной фигуры перемещаются либо параллельно плоскости $П_1$, либо параллельно плоскости $П_2$.

Пусть, например, треугольник ABC совершает плоскопараллельное движение относительно фронтальной плоскости проекций $П_2$ (рис. 5.18). Его вершины перемещаются во фронтальных плоскостях уровня, следовательно, горизонтальные проекции вершин перемещаются по горизонтальным прямым. При таком движении угол наклона плоскости треугольника к плоскости $П_2$ не меняется, поэтому фронтальная проекция треугольника не меняет свою форму. Отсюда следует теорема.

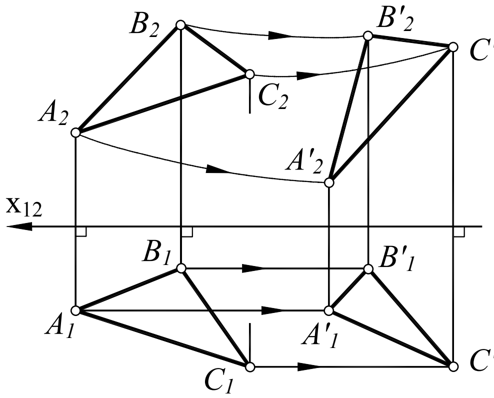


Рис. 5.18

Теорема. *При плоскопараллельном движении фигуры относительно плоскости $П_2$ горизонтальные проекции ее точек перемещаются по прямым, перпендикулярным вер-*

тикальным линиям связи, а фронтальная проекция фигуры остается конгруэнтной самой себе.

Взаимно перпендикулярные плоскости проекций $П_1$ и $П_2$ вполне “равноправны”, поэтому теорема справедлива и для случая плоскопараллельного перемещения относительно плоскости $П_1$: *при плоскопараллельном движении фигуры относительно плоскости $П_1$ фронтальные проекции ее точек перемещаются по прямым, перпендикулярным вертикальным линиям связи, а горизонтальная проекция фигуры остается конгруэнтной самой себе.*

Примечание. Плоскопараллельное движение данной фигуры из своего исходного положения в конечное положение может происходить по произвольной криволинейной траектории. Каждая точка фигуры описывает при этом некоторую плоскую кривую. Например, на рис. 5.18 вершины треугольника *ABC* описывают кривые линии *A-A'*, *B-B'*, *C-C'*, форма которых никак не влияет на результат преобразования. Существенное значение имеет только конечное положение перемещаемой фигуры, а не траектория плоскопараллельного перемещения.

Основные задачи, решаемые способом плоскопараллельного движения

Перемещая данную геометрическую фигуру, можно разместить ее частным образом относительно плоскостей проекций: прямую общего положения можно передвинуть в положение прямой уровня или проецирующей прямой, а плоскость общего положения – переместить в положение проецирующей плоскости или плоскости уровня.

Напомним, что в п. 5.2 рассматривался способ замены плоскостей проекций, когда перемещались плоскости проекций, а данная фигура оставалась неподвижной. Сейчас будет рассмотрен “обратный” способ: будем перемещать данные фигуры относительно неподвижных плоскостей проекций.

Задача 1. *Преобразовать прямую общего положения в прямую уровня.*

Пусть требуется прямую *AB* общего положения преобразовать в прямую уровня, например, во фронталь (рис. 5.19). Иначе говоря, надо так передвинуть отрезок *AB*, чтобы он стал располагаться параллельно фронтальной плоскости проекций.

Выполним плоскопараллельное перемещение отрезка *AB* относительно плоскости $П_1$ (по произвольной траектории). В соответствии со сформулированной выше теоремой, фронтальные проекции точек *A*, *B* будут при этом перемещаться по горизонтальным прямым A_2-A_2', B_2-B_2'. Длина горизонтальной проекции отрезка при таком движении не изменяется: $A_1B_1=A_1'B_1'$. Перемещение отрезка заканчивается в тот момент, когда он займет требуемое в задаче положение фронтали: $A'B'||П_2$.

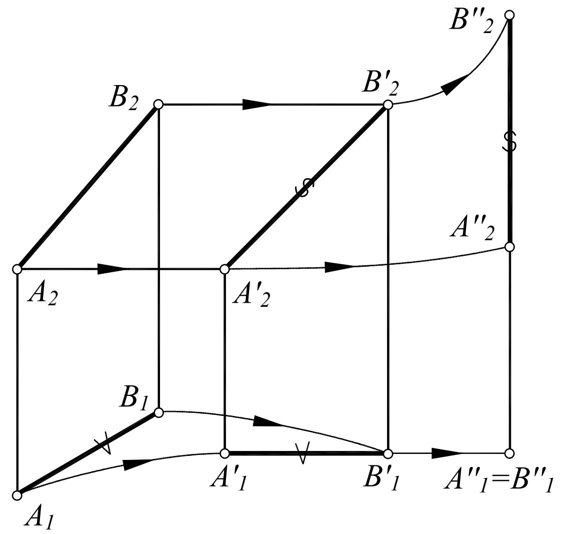


Рис. 5.19

Задача 2. *Преобразовать прямую уровня в проецирующую прямую.*

Пусть требуется преобразовать прямую уровня *A'B'* (фронталь) в горизонтально-проецирующую прямую (см. рис. 5.19). Иначе говоря, надо так передвинуть отрезок *A'B'*, параллельный фронтальной плоскости проекций, чтобы он расположился перпендикулярно горизонтальной плоскости проекций.

Перемещаем отрезок $A'B'$ по произвольной траектории в новое положение $A''B''$, сохраняя параллельность отрезка плоскости $П_2$ (то есть выполняем плоскопараллельное перемещение отрезка $A'B'$ относительно плоскости проекций $П_2$). Перемещение заканчивается, когда отрезок становится горизонтально-проецирующей прямой: $A''B'' \perp П_1$.

Чертеж, представленный на рис. 5.19, можно рассматривать как решение задачи преобразования прямой общего положения AB в проецирующую прямую $A''B''$ посредством двух последовательных плоскопараллельных перемещений.

Задача 3. *Плоскость общего положения преобразовать в проецирующую плоскость.*

Дана плоскость ABC общего положения (рис. 5.20). Проведем в плоскости какую-нибудь линию уровня (например, фронталь f). Выполним плоскопараллельное перемещение треугольника $ABC \rightarrow A'B'C'$ относительно фронтальной плоскости проекций (по произвольной траектории). Закончим перемещение, когда фронталь f займет горизонтально-проецирующее положение f'. При этом вся плоскость $A'B'C'$ становится горизонтально-проецирующей плоскостью (почему?).

Фронтальные проекции треугольников ABC и $A'B'C'$ конгруэнтны. Горизонтальные проекции криволинейных траекторий A-A', B-B', C-C' – прямые линии (см. рис. 5.20).

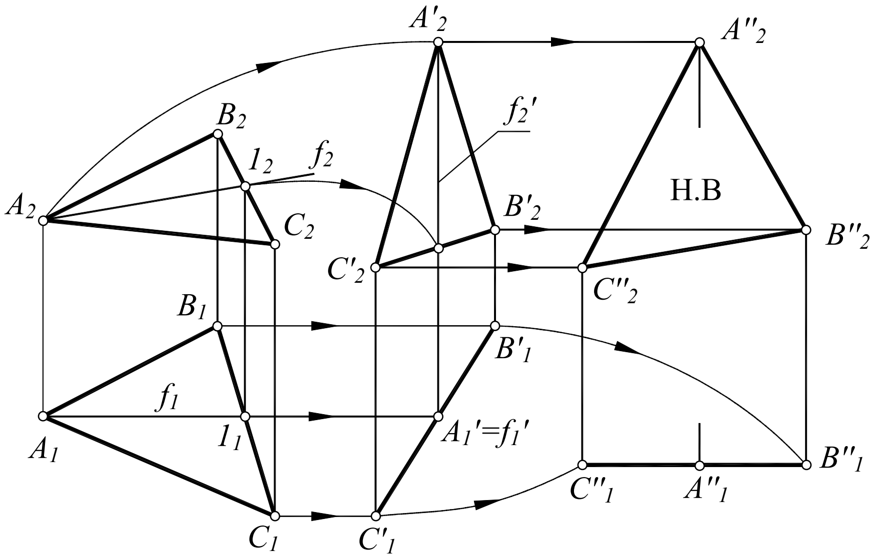


Рис. 5.20

Задача 4. *Проецирующую плоскость преобразовать в плоскость уровня.*

Плоскость $A'B'C'$, занимающую горизонтально-проецирующее положение, требуется преобразовать в плоскость уровня (см. рис. 5.20). Для решения задачи надо переместить плоскость $A'B'C'$ в положение $A''B''C''$, параллельное плоскости $П_2$. В процессе движения сохраняется перпендикулярность плоскости $A'B'C'$ к плоскости проекций $П_1$. Любая точка плоскости $A'B'C'$ перемещается в горизонтальной плоскости уровня, поэтому фронтальные проекции криволинейных траекторий A'-A'', B'-B'', C'-C'' изображаются на чертеже горизонтальными прямыми линиями (см. рис. 5.20).

Примечание. Чертеж, представленный на рис. 5.20, можно рассматривать как решение задачи определения истинной формы фигуры, лежащей в плоскости общего положения. Действительно, треугольник ABC в своем новом положении $A''B''C''$ параллелен фронтальной плоскости проекций, поэтому $A_2''B_2''C_2''$ - натуральная величина треугольника ABC, лежащего в плоскости общего положения. Для решения задачи потребовалось выполнить два последовательных плоскопараллельных перемещения данной плоской фигуры.

5.5. Способ вращения вокруг проецирующей прямой

При плоскопараллельном перемещении фигуры каждая ее точка описывает некоторую произвольную плоскую кривую. При вращении фигуры вокруг проецирующей прямой каждая ее точка описывает не произвольную кривую, а окружность. Поэтому вращение вокруг проецирующей прямой может рассматриваться как частный случай плоскопараллельного движения.

Пусть, например, треугольник *ABC* вращается вокруг горизонтально-проецирующей прямой *j* (рис. 5.21). Его вершины перемещаются в плоскостях, перпендикулярных оси вращения (на рис. 5.21 – в горизонтальных плоскостях *Г* и *Г'*). Фронтальная проекция траектории любой точки фигуры – прямая линия, горизонтальная проекция – окружность. При таком движении угол наклона плоскости треугольника к плоскости $П_1$ не меняется, поэтому горизонтальная проекция треугольника не меняет свою форму (треугольники $A_1B_1C_1$ и $A'_1B'_1C'_1$ конгруэнтны).

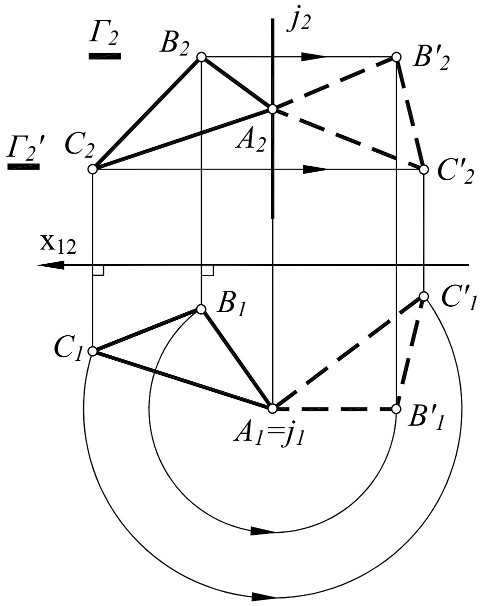


Рис. 5.21

Рассмотрим алгоритмы решения основных задач способом вращения вокруг проецирующей прямой.

Задача 1. *Преобразовать прямую общего положения в прямую уровня.*

Пусть требуется преобразовать прямую *AB* общего положения в прямую уровня, например, во фронталь (рис. 5.22). В качестве оси вращения *j* выбираем вертикальную прямую ($j \perp П_1$). Если в качестве оси вращения выбрать фронтально-проецирующую прямую (перпендикулярную $П_2$), то прямую общего положения не удастся преобразовать во фронталь (почему?).

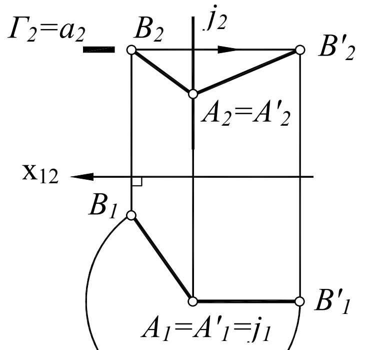


Рис. 5.22

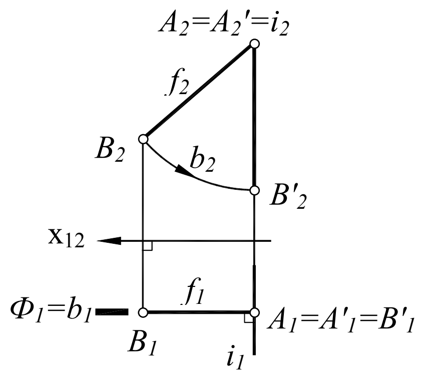


Рис. 5.23

Для упрощения графического решения ось вращения *j* проведем через точку *A*. Тогда в процессе вращения точка *A* остается на своем месте. Нужно построить лишь новое положение точки *B*.

Точка *B* описывает окружность *a*, плоскость *Г* которой параллельна $П_1$. Длина горизонтальной проекции A_1B_1 отрезка *AB* при таком движении не изменяется.

Вращение отрезка заканчивается в тот момент, когда он займет требуемое в задаче положение линии уровня (фронтали): $A'B'||П_2$. Фронтальная проекция $A'_2B'_2$ повернутого отрезка определяет натуральную величину данного отрезка AB, поэтому способом вращения вокруг проецирующей прямой можно решить задачу определения истинной длины отрезка прямой общего положения (см. рис. 5.22).

Задача 2. *Преобразовать прямую уровня в проецирующую прямую.*

Пусть требуется преобразовать прямую уровня $f=AB$ (фронталь) в горизонтально-проецирующую прямую (рис. 5.23). В качестве оси вращения i выбираем фронтально-проецирующую прямую ($i \perp П_2$). Если выбрать вертикальную ось вращения, то фронталь не удастся преобразовать в проецирующую прямую (почему?).

Для упрощения графического решения ось вращения i проводим через точку A. Тогда в процессе вращения точка A остается на своем месте. Нужно построить лишь новое (повернутое) положение точки B. Точка B в процессе поворота вокруг i описывает окружность b, плоскость $Ф$ которой параллельна $П_2$. Длина фронтальной проекции отрезка AB при таком движении не изменяется. Вращение отрезка заканчивается в тот момент, когда он займет требуемое вертикальное (горизонтально-проецирующее) положение: $A'B' \perp П_1$.

Задача 3. *Плоскость общего положения преобразовать в проецирующую плоскость.*

Дана плоскость ABC общего положения (рис. 5.24). Проведем в плоскости какую-нибудь линию уровня (например, фронталь). Вращением вокруг фронтально-

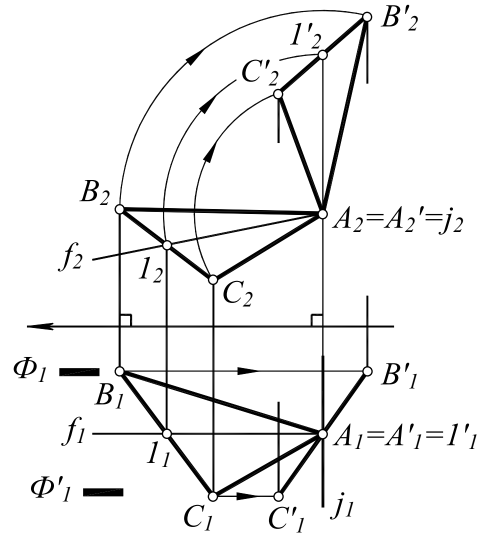


Рис. 5.24

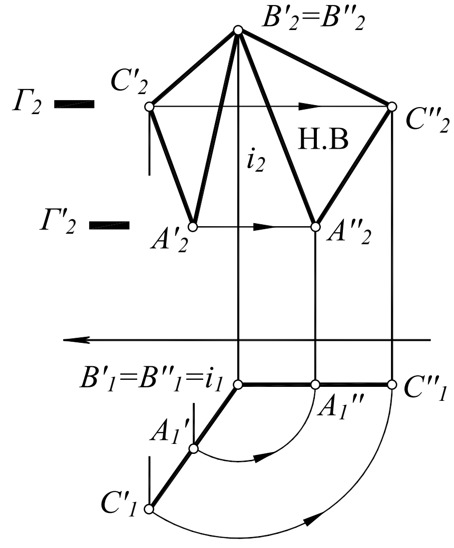


Рис. 5.25

проецирующей прямой j повернем треугольник ABC таким образом, чтобы фронталь f стала горизонтально-проецирующей прямой. Треугольник займет положение $A'B'C'$, перпендикулярное к $П_1$. В процессе вращения точка A неподвижна, так как находится на оси вращения j. Точки B и C описывают окружности, лежащие в фронтальных плоскостях уровня $Ф$ и $Ф'$ (см. рис. 5.24).

Задача 4. *Проецирующую плоскость преобразовать в плоскость уровня.*

Плоскость $A'B'C'$, занимающую горизонтально-проецирующее положение, требуется преобразовать в плоскость уровня (рис. 5.25). Вращаем треугольник $A'B'C'$ вокруг вертикальной оси i. Вращение прекращается, когда треугольник займет положение $A''B''C''$, параллельное плоскости $П_2$. В процессе вращения сохраняется перпендикулярность плоскости треугольника к плоскости проекций $П_1$. Точки A' и C' описывают окружности, лежащие в горизонтальных плоскостях уровня *Г* и *Г'*. Точка *B'*, лежащая на оси вращения *i*, остается на своем месте.

Примечание. Чертежи, представленные на рис. 5.24 и рис. 5.25, можно рассматривать как решение задачи определения истинной формы треугольника *ABC*, лежащего в плоскости общего положения, двумя последовательными вращениями треугольника. Вращением вокруг фронтально-проецирующей оси *j* треугольник *ABC* переведен в горизонтально-проецирующее положение *A'B'C'* (см. рис. 5.24). Вращением вокруг горизонтально-проецирующей оси *i* треугольник *A'B'C'* повернут в положение *A''B''C''*, параллельное фронтальной плоскости проекций (см. рис. 5.25). Проекция $A_2''B_2''C_2''$ - натуральная величина треугольника *ABC*.

5.6. Способ вращения вокруг прямой уровня

Вращение вокруг прямой уровня применяется, как правило, для преобразования плоскости общего положения в плоскость уровня. Рассмотренными ранее способами эта задача решается двумя преобразованиями (сначала плоскость общего положения преобразуется в проецирующую плоскость, затем проецирующая плоскость преобразуется в плоскость уровня). В отличие от ранее рассмотренных способов, вращение вокруг прямой уровня позволяет решить эту задачу не двумя, а одним преобразованием.

Задача. *Определить натуральную величину треугольника ABC вращением вокруг его горизонтали* (рис. 5.26).

Горизонталь *h=C-1* проведена через вершину *C*, поэтому в процессе вращения треугольника вокруг горизонтали точки *C* и *1* остаются в покое. Точки *A* и *B*, вращаясь вокруг *h*, описывают окружности, лежащие в плоскостях *Ф* и *Ф'*. Эти плоскости перпендикулярны горизонтали *h*, следовательно, перпендикулярны плоскости $П_1$.

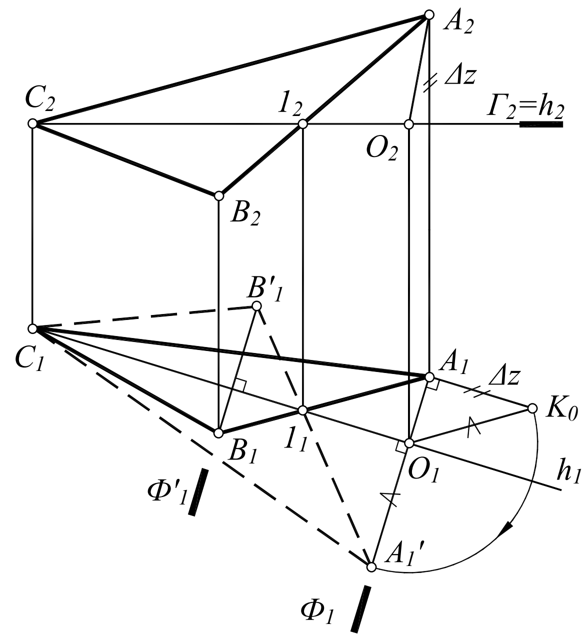


Рис. 5.26

Например, точка *A*, вращаясь вокруг оси *h*, описывает в пространстве окружность радиуса R_A. Центр *O* этой окружности находится на пересечении оси вращения *h* с плоскостью *Ф*. Радиус вращения точки *A* равен длине отрезка *OA*: $R_A=|OA|$. Отрезок *OA* занимает общее положение, поэтому для определения $|OA|$ на рис. 5.26 построен вспомогательный прямоугольный треугольник $O_1A_1K_0$, один катет которого совпадает с горизонтальной проекцией отрезка *OA*, а другой катет (катет A_1K_0) равен разности высот Δz точек *A* и *O*. Гипотенуза O_1K_0, в соответствии со способом прямоугольного треугольника, равна истинной длине отрезка *OA*, а следовательно – радиусу вращения точки *A* вокруг горизонтали: $R_A=|OA|=O_1K_0$.

Будем мысленно вращать треугольник *ABC* вокруг *h*. В процессе вращения наступит момент, когда треугольник займет горизонтальное положение *A'B'C'* (попадет в горизонтальную плоскость уровня *Г*, отмеченную на рис. 5.26). Отрезок *OA* также займет горизонтальное положение *OA'* и изобразится на $П_1$ в свою натуральную величину, равную $R_A=O_1K_0$, что позволяет отметить на чертеже горизонтальную проекцию A'_1 вершины *A'* треугольника в его новом горизонтальном положении *A'B'C*. Для этого вдоль перпендикуляра к h_1 от точки O_1 откладываем отрезок $O_1A'_1$, равный $R_A=O_1K_0$. На чертеже точка A'_1 отмечена с помощью дуги окружности, имеющей центр O_1 и радиус $R_A=O_1K_0$ (см. рис. 5.26). Фронтальная проекция A'_2 точки A' находится в горизонтальной плоскости $Г$ (на чертеже точка A'_2 не показана).

Вершина C неподвижна (находится на оси вращения h), поэтому для окончательного решения задачи требуется построить новое положение только одной точки – вершины B'. Заметим, что точки A, B, 1 принадлежат одной прямой. В процессе вращения точка 1 остается в покое (находится на h). В новом (горизонтальном) положении $A'B'C'$ точки A', B', 1 также будут располагаться на одной прямой. Точка B вращается в плоскости $Ф'$, поэтому искомая точка B' находится на пересечении луча A'-1 и плоскости $Ф'$. Горизонтальная проекция B'_1 искомой точки B' отмечается на пересечении прямой A_1'-1_1 и горизонтальной проекции $Ф'_1$ плоскости $Ф'$ (см. рис. 5.26).

Таким образом, единственным вращением вокруг горизонтали h треугольник ABC повернут в горизонтальное положение $A'B'C$. Горизонтальная проекция $A'_1B'_1C_1$ повернутого треугольника, показанная на рис. 5.26 штриховыми линиями, дает истинную форму (натуральную величину) треугольника ABC. Фронтальная проекция треугольника в его новом положении совпадает с вырожденной проекцией $Г_2$ горизонтальной плоскости уровня $Г$.

Вопросы для повторения

1. Назовите основные способы преобразования комплексного чертежа.
2. В чем сущность способа замены плоскостей проекций?
3. Назвать основные задачи, решаемые способом замены плоскостей проекций.
4. Сформулировать теоремы о плоскопараллельном движении фигуры относительно плоскостей проекций $П_1$ и $П_2$.
5. Почему способ вращения вокруг проецирующей прямой считается частным случаем способа плоскопараллельного перемещения?
6. Какие основные задачи решают способом плоскопараллельного перемещения и способом вращения вокруг проецирующей прямой? В чем сходство и отличие этих способов и способа замены плоскостей проекций?
7. Определить истинную величину угла ABC способом вращения вокруг линии уровня (рис. 5.27).

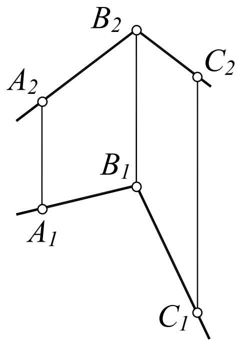


Рис. 5.27