Лекция 4

ВЗАИМНО ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫЕ ПРЯМЫЕ И ПЛОСКОСТИ

Определение 1. *Две прямые в пространстве называются перпендикулярными, если угол между ними равен 90°*. Перпендикулярные прямые могут пересекаться, но могут быть и скрещивающимися.

Определение 2. *Прямая называется перпендикулярной к плоскости, если она перпендикулярна к любой прямой, лежащей в этой плоскости.*

Определение 3. *Две пересекающиеся плоскости называются взаимно перпендикулярными, если образованный ими двугранный угол равен 90°.*

Теоремы о перпендикулярности прямых и плоскостей, доказываемые в школьном курсе геометрии [13], могут быть сформулированы в виде признаков перпендикулярности.

4.1. Признаки перпендикулярности прямых и плоскостей

Признак 1. *Прямая, перпендикулярная к одной из параллельных прямых, перпендикулярна к обеим параллельным прямым.*

Пусть прямые a и b параллельны (рис. 4.1). Проведем перпендикуляр t к одной из прямых, например, к прямой a. Тогда прямая t будет перпендикулярна не только к прямой a, но и к прямой b.

Из этого признака следует, что две взаимно перпендикулярные прямые в пространстве не обязаны пересекаться. Они могут скрещиваться, но при этом быть взаимно перпендикулярны. Например, на рис. 4.1 каждая из параллельных прямых t и t' перпендикулярна каждой из прямых a и b.

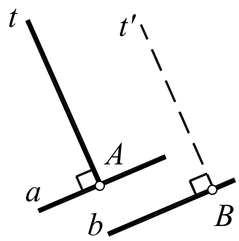

Рис. 4.1

Признак 2. *Если прямая t перпендикулярна каким-нибудь двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости Σ, то прямая t перпендикулярна к этой плоскости Σ (рис. 4.2).*

Две пересекающиеся прямые a и b определяют в пространстве некоторую плоскость Σ. Проведем перпендикуляр t к этим прямым (см. рис. 4.2). Согласно признаку 2, прямая t перпендикулярна к плоскости Σ.

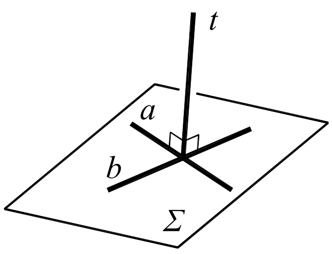

Рис. 4.2

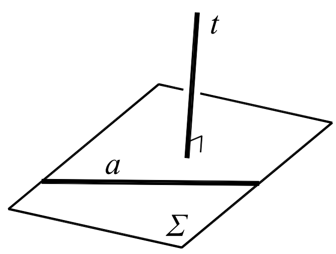

Рис. 4.3

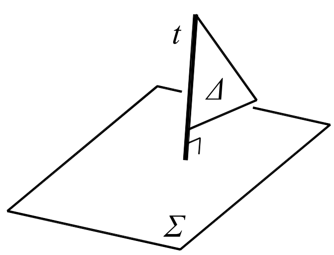

Рис. 4.4

Признак 3. *Если прямая перпендикулярна плоскости, то она перпендикулярна любой прямой в этой плоскости* (этот признак перпендикулярности следует непосредственно из определения 2).

Дана плоскость Σ. Проведем к ней перпендикуляр t (рис. 4.3). Согласно признаку 3, прямая t перпендикулярна к произвольной прямой a, лежащей в плоскости Σ.

Признак 4. *Если плоскость Δ проходит через перпендикуляр к плоскости Σ, то плоскости Δ и Σ взаимно перпендикулярны (рис. 4.4).*

Дана плоскость Σ. Проведем к ней перпендикуляр t. Через прямую t проведем произвольную плоскость Δ (см. рис. 4.4). Согласно признаку 4, плоскость Δ перпендикулярна плоскости Σ.

Признаки перпендикулярности используются при построении взаимно перпендикулярных прямых и плоскостей на комплексном чертеже.

4.2. Теорема 1 (о проекциях прямого угла)

Если одна сторона прямого угла параллельна какой-либо плоскости проекций, а другая сторона является прямой общего положения, то прямой угол изображается на этой плоскости проекций прямым углом.

Пусть отрезок AB перпендикулярен отрезку BC, причем отрезок AB – горизонталь ($AB||\Pi_1$), а отрезок BC – прямая общего положения (рис. 4.5). Докажем, что угол $A_1B_1C_1$ – прямой, то есть $A_1B_1 \perp B_1C_1$.

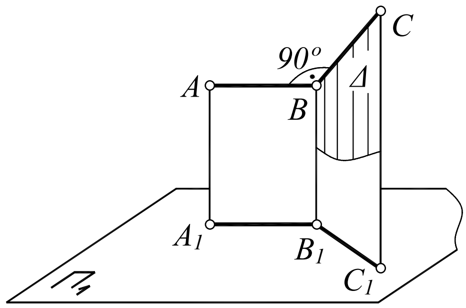

Рис. 4.5

Доказательство

1) Отрезок AB перпендикулярен отрезку BC по условию: $AB \perp BC$.

2) Отрезок AB перпендикулярен линии связи BB_1 по построению.

Следовательно (в соответствии с признаком 2 перпендикулярности прямой и плоскости), отрезок AB перпендикулярен плоскости $\Delta(BC \cap BB_1)$.

3) Проекция A_1B_1 отрезка AB параллельна самому отрезку AB по условию. Отрезок AB перпендикулярен плоскости Δ, следовательно, проекция A_1B_1 также перпендикулярна плоскости Δ.

4) Поскольку прямая A_1B_1 перпендикулярна плоскости Δ, то она перпендикулярна прямой B_1C_1, лежащей в плоскости Δ (признак 3). Следовательно, $A_1B_1 \perp B_1C_1$. Теорема доказана.

Следствие из теоремы 1. ***Если одна из взаимно перпендикулярных скрещивающихся прямых параллельна какой-либо плоскости проекций, то данные скрещивающиеся прямые изображаются на этой плоскости проекций прямым углом.***

Одну из сторон “висящего в воздухе” прямого угла ABC, показанного на рис. 4.5 (например, сторону BC), можно мысленно переместить в пространстве параллельно самой себе. Тогда прямая BC выйдет из пересечения со стороной AB. Но горизонтальные проекции прямых AB и BC все равно образуют прямой угол.

Рассмотрим примеры построения комплексных чертежей взаимно перпендикулярных прямых.

Задача 1. *На чертеже дана горизонталь h и точка A (рис. 4.6). Требуется из точки A опустить перпендикуляр t на прямую h.* Требование “опустить перпендикуляр на прямую” означает, что перпендикуляр к прямой должен с ней пересечься.

В соответствии с теоремой 1, если прямая t перпендикулярна горизонтали h, то их горизонтальные проекции t_1 и h_1 должны быть взаимно перпендикулярны. Горизонталь h и прямая t, показанные на рис. 4.6, пересекаются в точке B и образуют прямой угол. Задача имеет единствен-

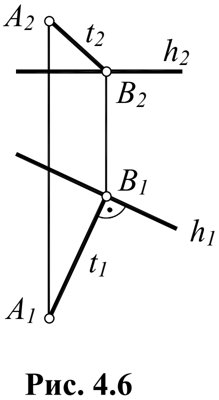

Рис. 4.6

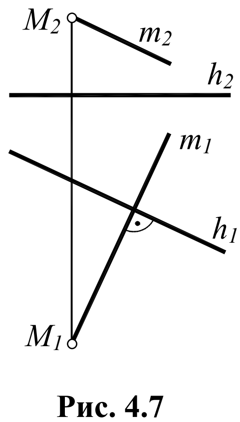

Рис. 4.7

ное решение, так как из точки A можно опустить единственный перпендикуляр на прямую h.

Задача 2. *Дана горизонталь h и точка M (рис. 4.7). Требуется через точку M провести прямую, перпендикулярную к горизонтали h, но не пересекающуюся с ней.*

Проведем через точку M какую-нибудь прямую m, горизонтальная проекция m_1 которой образует прямой угол с h_1. В соответствии со следствием из теоремы 1, горизонталь h и прямая m перпендикулярны друг другу, но не пересекаются между собой (см. рис. 4.7). Задача имеет бесчисленное множество решений. Все прямые, проходящие через точку M и перпендикулярные к горизонтали h, образуют плоскость, перпендикулярную к h.

Задача 3. *Дана фронталь f и точка A (рис. 4.8). Требуется из точки A опустить перпендикуляр t на прямую f.*

Если прямая t перпендикулярна фронтали f, то, в соответствии с теоремой 1, их фронтальные проекции t_2 и f_2 должны быть взаимно перпендикулярны (см. рис. 4.8). Фронталь f и прямая t, показанные на чертеже, пересекаются в точке B и образуют прямой угол. Задача имеет единственное решение.

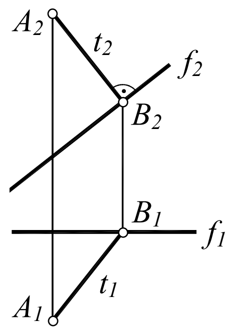

Рис. 4.8

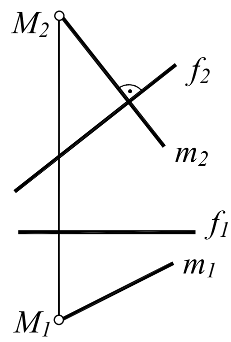

Рис. 4.9

Задача 4. *Дана фронталь f и точка M (рис. 4.9). Требуется через точку M провести прямую, перпендикулярную к фронтали f, но не пересекающуюся с ней.*

Проведем через точку M какую-нибудь прямую m, фронтальная проекция m_2 которой образует прямой угол с f_2. Фронталь f и прямая m, показанные на рис. 4.9, перпендикулярны друг другу (согласно следствию из теоремы 1), но между собой не пересекаются (скрещиваются). Задача имеет бесчисленное множество решений. На рис. 4.9 показано только одно из решений задачи.

4.3. Теорема 2 (о взаимной перпендикулярности прямых и плоскостей)

Напомним признак перпендикулярности прямой и плоскости: если прямая перпендикулярна к плоскости, то она перпендикулярна любой прямой в этой плоскости (см. п. 4.1). В частности, прямая, перпендикулярная к плоскости, перпендикулярна к главным линиям плоскости – горизонтали и фронтали. Отсюда следует теорема об изображении на комплексном чертеже перпендикуляра к плоскости общего положения.

Если прямая d перпендикулярна к плоскости, то на комплексном чертеже горизонтальная проекция d_1 прямой перпендикулярна горизонтальной проекции горизонтали ($d_1 \perp h_1$), а фронтальная проекция d_2 прямой перпендикулярна фронтальной проекции фронтали ($d_2 \perp f_2$), принадлежащим этой плоскости.

Пусть прямая d перпендикулярна к плоскости общего положения Σ (рис. 4.10). Начертим в плоскости Σ ее главные линии – горизонталь h и фронталь f. Докажем, что на комплексном чертеже проекции перпендикуляра d подчиняются условиям: $d_1 \perp h_1$, $d_2 \perp f_2$.

Доказательство

1) Прямая d перпендикулярна плоскости Σ по условию. Следовательно, в соответствии с третьим признаком перпендикулярности, прямая d перпендикулярна главным линиям плоскости Σ – горизонтали h и фронтали f: $\boldsymbol{d \perp h, d \perp f}$.

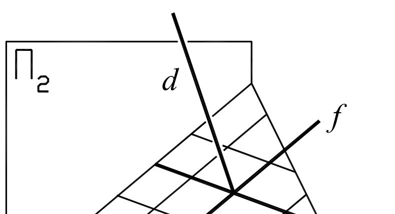

Рис. 4.10

2) Прямые d и h образуют прямой угол, причем сторона h параллельна горизонтальной плоскости проекций. Следовательно, в соответствии с теоремой 1, горизонтальные проекции прямых d и h взаимно перпендикулярны: $\boldsymbol{d_1 \perp h_1}$. Первая часть теоремы доказана.

3) Прямые d и f также образуют прямой угол, причем сторона f параллельна фронтальной плоскости проекций. Следовательно, в соответствии с теоремой 1, фронтальные проекции прямых d и f взаимно перпендикулярны: $\boldsymbol{d_2 \perp f_2}$. Вторая часть теоремы, а вместе с тем и вся теорема, доказана.

Запишем теорему 2 в символической форме.

Если $d \perp \Sigma$, то $d_1 \perp h_1$, а $d_2 \perp f_2$, где h и f - главные линии плоскости Σ.

Рассмотрим примеры построения на чертеже взаимно перпендикулярных прямых и плоскостей во всех возможных сочетаниях. Таких сочетаний всего три:

1) взаимно перпендикулярные прямая и плоскость,

2) две взаимно перпендикулярные плоскости,

3) две взаимно перпендикулярные прямые.

4.3.1. Построение взаимно перпендикулярных прямой и плоскости

Напомним утверждение теоремы 2. Плоскость Σ и прямая m взаимно перпендикулярны, если на чертеже выполнены условия: $m_1 \perp h_1$, $m_2 \perp f_2$, где h и f – главные линии плоскости Σ.

“**Прямая” задача.** *Через данную точку M провести прямую m, перпендикулярную к плоскости Σ общего положения.* Плоскость Σ задана на чертеже прямыми a и b, пересекающимися в точке K (рис. 4.11).

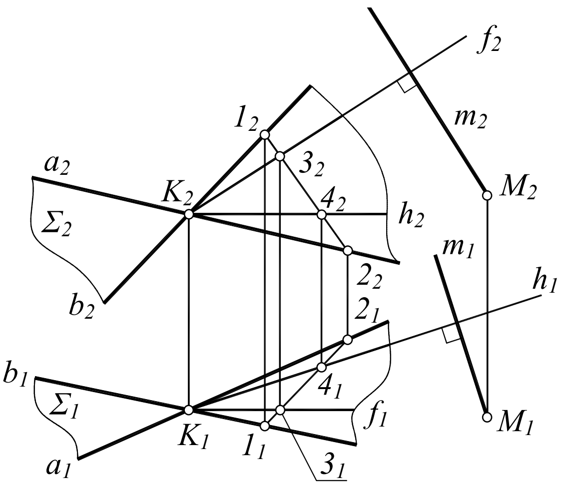

Рис. 4.11

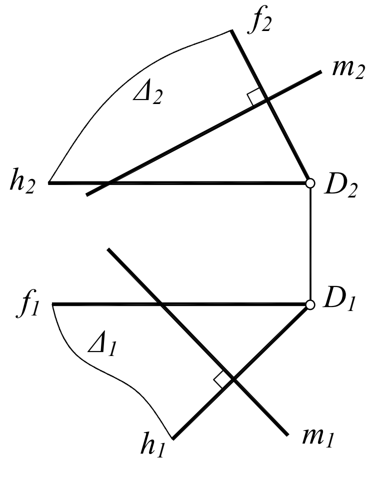

Рис. 4.12

Начертим главные линии плоскости Σ (горизонталь h и фронталь f). Для построения этих линий в плоскости Σ проведена произвольная вспомогательная прямая *1-2*. На этой прямой отмечены точки *3* и *4*, принадлежащие фронтали и горизонтали.

Проведем через точку M прямую m таким образом, чтобы выполнить условия теоремы 2: горизонтальная проекция m_1 прямой m перпендикулярна к h_1, а фронтальная проекция m_2 прямой m перпендикулярна к f_2. Прямая $m(m_1, m_2)$ перпендикулярна к плоскости Σ. Задача решена.

“Обратная” задача. *Через точку D провести плоскость Δ, перпендикулярную прямой общего положения m* (рис. 4.12).

Плоскость, перпендикулярная к прямой общего положения, может быть задана пересекающимися горизонталью и фронталью, перпендикулярными к данной прямой. На рис. 4.12 через точку D проведены горизонталь h и фронталь f таким образом, чтобы выполнить условия: $m_1 \perp h_1$ и $m_2 \perp f_2$. Задача решена. Действительно, в соответствии с теоремой 2, начерченная на рис. 4.12 плоскость $\Delta(h \cap f)$ перпендикулярна прямой m. Прямая m перпендикулярна как горизонтали h, так и фронтали f.

4.3.2. Построение взаимно перпендикулярных плоскостей

Плоскость, перпендикулярную к данной плоскости, можно провести двумя способами: либо через прямую, перпендикулярную данной плоскости, либо перпендикулярно прямой, принадлежащей заданной плоскости.

Задача. *Плоскость Σ общего положения задана пересекающимися прямыми a и b. Требуется через данную точку M провести плоскость Δ, перпендикулярную к плоскости Σ.*

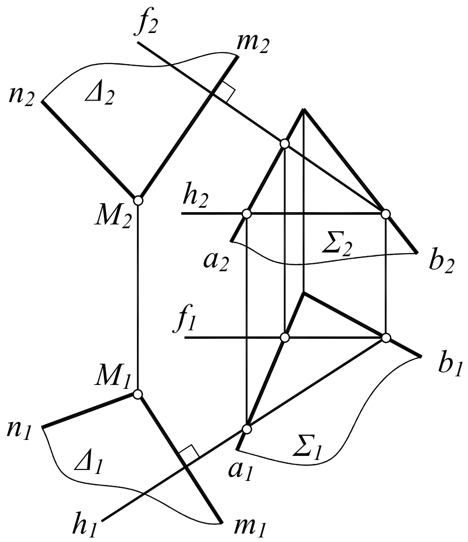

Рис. 4.13

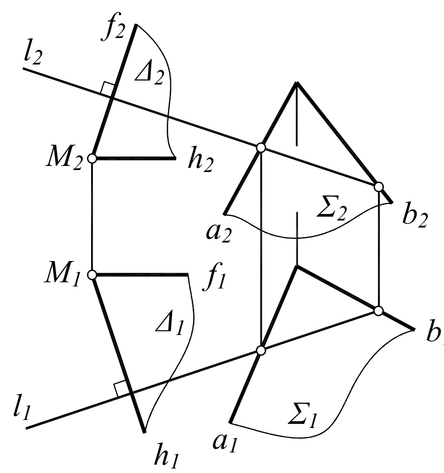

Рис. 4.14

<u>Первый способ</u>

Начертим в плоскости Σ главные линии (горизонталь и фронталь), затем в соответствии с теоремой 2 проведем через точку M перпендикуляр m к плоскости Σ: $m_1 \perp h_1$ и $m_2 \perp f_2$ (рис. 4.13). Любая плоскость, проходящая через прямую m, перпендикулярна плоскости Σ. Проведем через точку M произвольную прямую n. Пересекающиеся прямые m и n определяют в пространстве плоскость Δ, перпендикулярную плоскости Σ.

Имеется бесчисленное множество решений, так как через перпендикуляр к плоскости Σ можно провести бесчисленное множество плоскостей. Все они перпендикулярны плоскости Σ.

<u>Второй способ</u>

Проведем в плоскости $\Sigma(a \cap b)$ произвольную прямую l (рис. 4.14). Плоскость Δ, перпендикулярная к прямой l, задается пересекающимися горизонталью и фронталью. На рис. 4.14 через точку M проведены горизонталь h и фронталь f таким образом, чтобы выполнить условия теоремы 2 о перпендикулярности прямой и плоскости: $h_1 \perp l_1$ и $f_2 \perp l_2$. Плоскость Δ, заданная горизонталью h и фронталью f, перпендикулярна к прямой l.

Прямая l лежит в плоскости Σ, следовательно, плоскость $\Delta(h \cap f)$ перпендикулярна к плоскости Σ.

Имеется бесчисленное множество решений: плоскость, перпендикулярная любой прямой l в плоскости Σ, будет перпендикулярна к Σ.

4.3.3. Построение взаимно перпендикулярных прямых

Напомним один из признаков перпендикулярности прямых и плоскостей: *если прямая перпендикулярна плоскости, то она перпендикулярна любой прямой в этой плоскости*. Следовательно, для построения перпендикуляра к данной прямой m надо провести плоскость Σ, перпендикулярную к этой прямой. Любая прямая, лежащая в плоскости Σ, будет перпендикулярна прямой m.

Задача. *На чертеже (рис. 4.15) дана прямая m общего положения. Требуется через данную точку M провести прямую a, перпендикулярную прямой m.*

Через точку M проведем плоскость Σ, перпендикулярную прямой m. Плоскость Σ, перпендикулярная к прямой общего положения m, может быть задана пересекающимися горизонталью и фронталью, каждая из которых проводится перпендикулярно к прямой m.

На рис. 4.15 через точку M проведены горизонталь h и фронталь f таким образом, чтобы выполнить условия: $m_1 \perp h_1$ и $m_2 \perp f_2$. В соответствии с теоремой 2, начерченная на рис. 4.15 плоскость Σ, заданная горизонталью h и фронталью f, перпендикулярна прямой m.

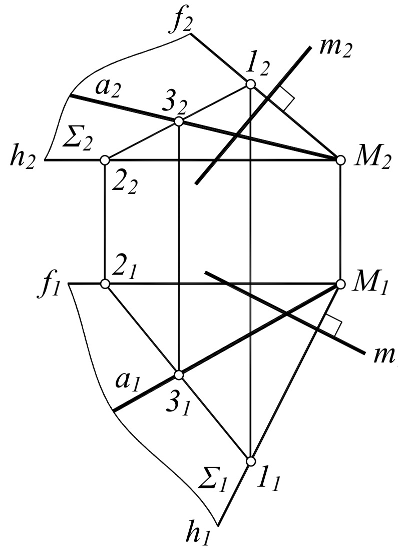

Рис. 4.15

Любая прямая в плоскости Σ перпендикулярна прямой m. На чертеже показана только одна такая прямая (прямая a). Скрещивающиеся прямые общего положения m и a взаимно перпендикулярны.

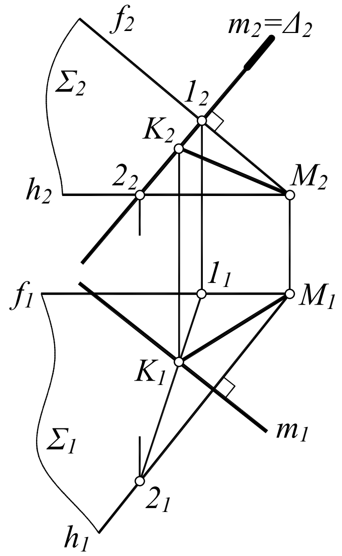

Рис. 4.16

Задача имеет множество решений: любая прямая в плоскости Σ, проходящая через точку M, перпендикулярна прямой m, то есть удовлетворяет условию задачи.

Среди найденного множества прямых, проходящих через точку M, есть единственная прямая, которая не только перпендикулярна к прямой m, но и пересекается с ней. Как построить такую прямую? Эта задача будет рассмотрена в следующем параграфе.

4.4. Решение типовых задач

Рассмотрим несколько геометрических задач, в которых требуется выполнять на чертеже построение взаимно перпендикулярных прямых и плоскостей.

Задача 1. *Опустить перпендикуляр из точки M на прямую m общего положения (рис. 4.16).*

Через точку M проведем плоскость Σ, перпендикулярную прямой m. Зададим эту плоскость горизонталью и фронталью так, чтобы на чертеже выполнялись условия теоремы 2: $h_1 \perp m_1$ и $f_2 \perp m_2$. Все прямые в плоскости Σ перпендикулярны прямой m.

Найдем точку K пересечения прямой m с плоскостью Σ. Для построения точки K следует применить схему решения первой позиционной задачи: провести через m вспомогательную секущую плоскость Δ, построить линию разреза $1\text{-}2$ и отметить искомую точку $K=m\cap(1\text{-}2)$.

Прямая MK лежит в плоскости Σ, следовательно, она перпендикулярна прямой m. При этом прямая MK пересекает прямую m. Поэтому отрезок MK есть искомый перпендикуляр, опущенный из точки M на прямую m.

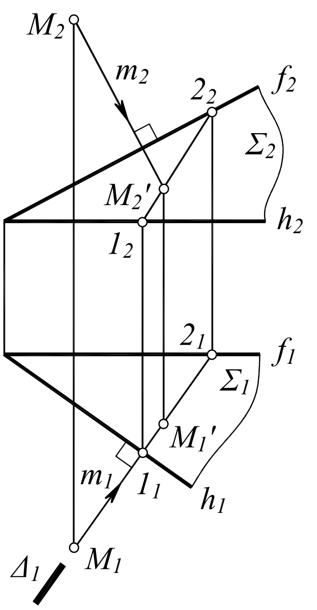

Рис. 4.17

Задача 2. *Найти расстояние от точки M до прямой m.* Искомое расстояние равно длине перпендикуляра, опущенного из точки M на прямую m. Поэтому сначала надо опустить перпендикуляр MK на прямую m (см. рис. 4.16), а затем определить истинную длину отрезка MK способом прямоугольного треугольника (см. п. 2.2.2).

Задача 3. *Построить ортогональную проекцию точки M на плоскость Σ* общего положения (рис. 4.17).

Для построения ортогональной проекции надо через точку M провести проецирующий луч m, перпендикулярный плоскости Σ. Точка пересечения M' этого луча с плоскостью Σ – ортогональная проекция точки M на плоскость Σ.

Чтобы начертить прямую m, перпендикулярную плоскости Σ, надо выполнить условия: $m_1 \perp h_1$ и $m_2 \perp f_2$, где h и f – главные линии плоскости Σ (теорема 2). После построения перпендикуляра m находим точку M' пересечения этого перпендикуляра m с плоскостью Σ, используя вспомогательную секущую плоскость Δ (первая позиционная задача, см. лекцию 3). Точка M' – искомая ортогональная проекция.

Задача 4. *Найти расстояние от точки M до плоскости Σ.*

Искомое расстояние равно длине перпендикуляра, опущенного из точки на плоскость. Поэтому сначала надо опустить перпендикуляр MM' из точки M на плоскость Σ (см. рис. 4.17), затем определить истинную длину отрезка MM' способом прямоугольного треугольника (см. п. 2.2.2).

Задача 5. *Построить ортогональную проекцию отрезка AB на плоскость Σ, заданную горизонталью и фронталью* (рис. 4.18).

Чтобы найти ортогональные проекции A', B' концов отрезка AB на плоскость Σ, проведем через точки A и B перпендикуляры к плоскости Σ (теорема 2). Затем найдем точки A', B' пересечения этих перпендикуляров с плоскостью Σ (первая позиционная задача). Отрезок $A'B'$ – искомая ортогональная проекция данного отрезка AB на плоскость Σ. Если задача решена правильно, то ортогональная проекция $A'B'$ пройдет через точку K пересечения прямой AB с плоскостью Σ (см. рис. 4.18).

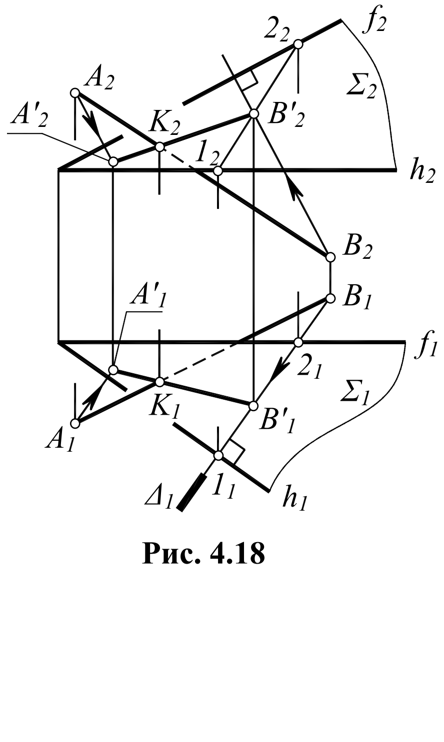

Рис. 4.18

Задача 6. *Построить ортогональную проекцию треугольника ABC на плоскость параллелограмма* (рис. 4.19).

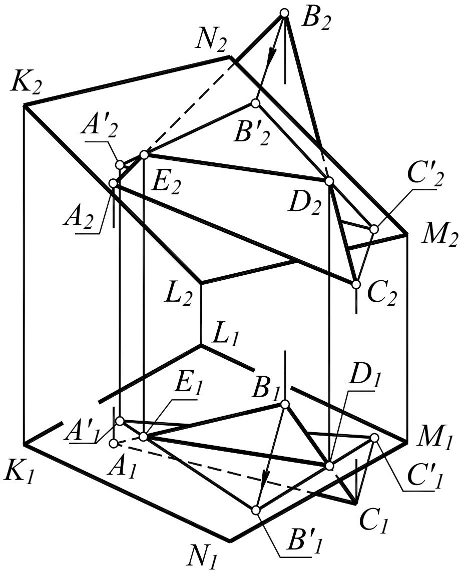

Рис. 4.19

Для решения задачи надо построить ортогональные проекции сторон треугольника на плоскость параллелограмма (так же, как и в предыдущей задаче).

Ортогональная проекция какой-либо стороны треугольника на плоскость параллелограмма проходит через точку пересечения этой стороны с плоскостью параллелограмма. Например, в точке E сторона AB треугольника пересекается с плоскостью параллелограмма. Ортогональная проекция $A'B'$ стороны AB проходит через точку E. Аналогичным образом, ортогональная проекция $B'C'$ стороны BC проходит через точку D пересечения стороны BC с плоскостью параллелограмма.

Точки D и E находят по схеме решения первой позиционной задачи. Вспомогательные построения на рис. 4.19 условно не показаны.

Задача 7. *Построить множество точек, удаленных от плоскости Σ(ABC) на расстояние 30 мм* (рис. 4.20).

Множество точек, удаленных от данной плоскости на заданное расстояние, расположено в плоскости Σ', параллельной данной плоскости Σ и удаленной от нее на заданное расстояние.

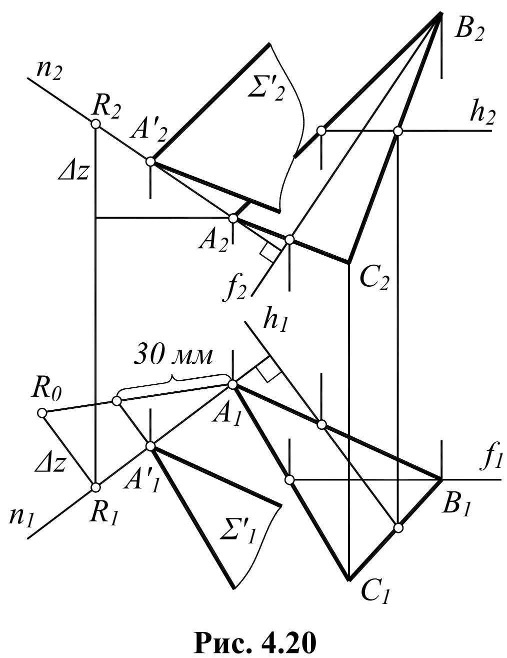

Рис. 4.20

Восставим перпендикуляр n к плоскости Σ из любой точки этой плоскости (например, из точки A). Для этого в плоскости Σ начертим ее главные линии (горизонталь и фронталь) и начертим проекции перпендикуляра n в соответствии с условиями теоремы 2 ($n_1 \perp h_1$ и $n_2 \perp f_2$).

Отложим вдоль перпендикуляра n от точки A отрезок AA' длиной 30 мм (см. п. 2.2.3). Через точку A' проведем плоскость Σ', параллельную плоскости Σ. На рис. 4.20 плоскость Σ' задана парой пересекающихся прямых, параллельных сторонам треугольника ABC. Задача решена.

Задача имеет два решения. Второе решение будет получено, если заданное расстояние *30 мм* отложить вдоль перпендикуляра n в другую сторону от точки A.

Задача 8. *Построить множество точек, равноудаленных от данных точек A и B* (рис. 4.21).

Точки, одинаково удаленные от двух данных точек A и B, располагаются в плоскости Σ, перпендикулярной к отрезку AB и проходящей через его середину. Искомую плоскость Σ зададим горизонталью и фронталью, перпендикулярными к отрезку AB и проходящими через его середину (точка O на рис. 4.21). Согласно теореме о перпендикулярности прямой и плоскости, на чертеже должны быть выполнены условия: $h_1 \perp$

A_1B_1, $f_2 \perp A_2B_2$, где h и f – главные линии искомой плоскости Σ, перпендикулярной отрезку AB. Поскольку плоскость $\Sigma(h \cap f)$ перпендикулярна к отрезку AB и проходит через его середину, то все точки плоскости Σ равноудалены от данных точек A и B. Задача решена.

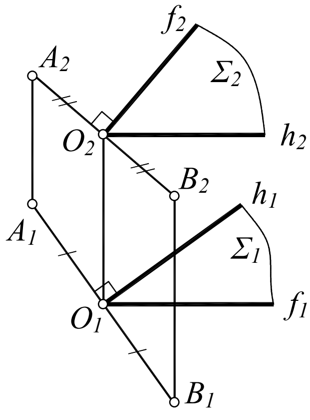

Рис. 4.21

Задача 9. *Определить расстояние между двумя параллельными прямыми a и b* (рис. 4.22).

Отметим на одной из параллельных прямых (например, на прямой a) произвольную точку A. Из точки A опустим перпендикуляр AB на прямую b (см. задачу 1). Расстояние между параллельными прямыми равно длине отрезка AB. Составим схему решения задачи.

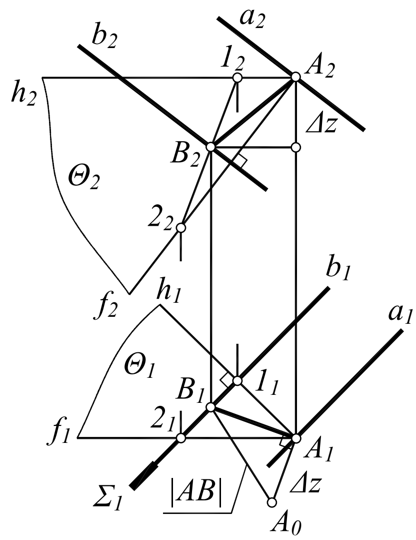

Рис. 4.22

Действие 1. Опускаем перпендикуляр AB из точки A на прямую b. Для этого проводим через точку A плоскость Θ, перпендикулярную прямым a и b (теорема 2). Затем с помощью проведенной через b вспомогательной секущей плоскости Σ находим точку B пересечения прямой b с плоскостью Θ (первая позиционная задача).

Действие 2. Способом прямоугольного треугольника (см. п. 2.2.2) определяем истинную длину отрезка AB. Задача решена.

Вопросы для повторения

1. Сформулировать признаки перпендикулярности прямой и плоскости, двух плоскостей.
2. Могут ли скрещивающиеся прямые быть взаимно перпендикулярны?
3. Сформулировать условие, при котором две прямые, расположенные в пространстве перпендикулярно друг другу, изображаются на плоскости проекций Π_1 или Π_2 взаимно перпендикулярными прямыми (теорема 1 о проекциях прямого угла).
4. Сколько прямых, перпендикулярных к данной прямой, можно провести через данную точку пространства?
5. Сколько перпендикуляров можно опустить из данной точки пространства на данную прямую?
6. Как изображается на чертеже прямая линия, перпендикулярная к данной плоскости (теорема 2 о проекциях прямой, перпендикулярной к плоскости)?
7. Сколько перпендикуляров к плоскости можно провести через данную точку пространства?
8. Сколько плоскостей, перпендикулярных к данной плоскости, можно провести через данную точку пространства?