

Лекция 3

ПОЗИЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ

Позиционными задачами называют задачи, в которых надо определить общие элементы геометрических фигур, заданных на чертеже. В начертательной геометрии рассматривают две позиционные задачи.

Первая позиционная задача: определение точки (или точек) пересечения произвольной кривой линии с произвольной поверхностью. В простейшем случае надо *найти точку пересечения прямой с плоскостью* (прямая – это простейшая линия, а плоскость – простейшая поверхность).

Вторая позиционная задача: построение линии пересечения двух произвольных поверхностей. В простейшем случае надо *найти линию пересечения двух плоскостей*.

3.1. Первая позиционная задача (простейший случай)

Напомним, что первой позиционной задачей в простейшем случае называют *построение точки пересечения прямой линии с плоскостью*.

Предварительно рассмотрим вспомогательную задачу, в которой надо построить “линию разреза” плоскости общего положения проецирующей плоскостью.

3.1.1. Вспомогательная задача

На чертеже (рис. 3.1) задана плоскость общего положения $\Gamma(ABC)$ и фронтально-проецирующая плоскость Σ . Требуется построить линию их пересечения.

Треугольник ABC “рассечен” (разрезан) проецирующей плоскостью Σ , поэтому проецирующую плоскость иногда называют “секущей плоскостью”. Линия разреза вполне определена двумя точками. В точке 1 секущая плоскость Σ пересекает сторону AC треугольника ABC , в точке 2 – сторону BC . Следовательно, линия $1-2$ – линия разреза плоскости $\Gamma(ABC)$ секущей плоскостью Σ . Символически это записывают так: $\Gamma(ABC) \cap \Sigma = 1-2$. Задача решена.

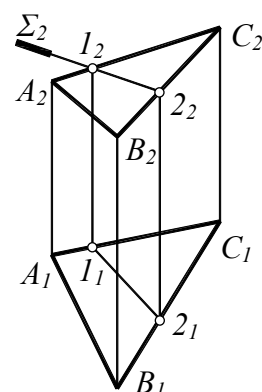


Рис. 3.1

3.1.2. Основная задача

Рассмотренная вспомогательная задача позволяет решить первую позиционную задачу для простейшего случая (построение точки пересечения прямой и плоскости).

Первая позиционная задача. На чертеже задана плоскость общего положения $\Gamma(ABC)$ и прямая общего положения l (рис. 3.2). Требуется построить точку их пересечения.

Для решения задачи надо выполнить три действия.

1. Через прямую l проведем вспомогательную секущую плоскость Σ и обязательно отметим ее на чертеже. На рис. 3.2 вспомогательная плоскость Σ , проходящая через l , выбрана фронтально-проецирующей.

Внимание! Первое действие – самое главное! Если на чертеже не отметить вспомогательную секущую плос-

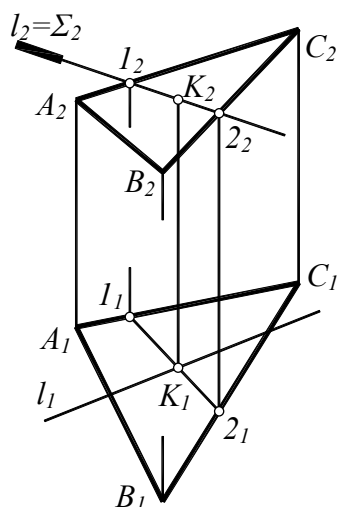


Рис. 3.2

кость, то последующие действия утрачивают геометрический смысл!

2. Секущая плоскость Σ разрезает данную плоскость ABC . Отмечаем на чертеже линию разреза $1-2$.

3. Линия разреза $1-2$ и прямая l лежат в одной и той же плоскости (в секущей плоскости Σ). Следовательно, прямые $1-2$ и l пересекутся между собой в некоторой точке K . Эта точка и есть искомая точка пересечения прямой l и плоскости ABC .

Проверим, правильно ли найдена точка K пересечения прямой l и плоскости $\Gamma(ABC)$. Эта точка должна одновременно принадлежать и прямой l , и данной плоскости $\Gamma(ABC)$. Найденная на чертеже (см. рис. 3.2) точка K – точка пересечения прямой l и линии $1-2$. Значит, найденная нами точка K находится и на данной прямой l , и на линии $1-2$. Но линия $1-2$ находится в плоскости $\Gamma(ABC)$. Следовательно, точка K находится как на прямой l , так и на плоскости $\Gamma(ABC)$, то есть K – искомая точка пересечения данной прямой l и данной плоскости $\Gamma(ABC)$. Точка K найдена правильно.

Запишем порядок решения первой позиционной задачи в символической форме (в виде алгоритма).

Определение. Алгоритм – совокупность последовательных однозначных операций, которые необходимо совершить для решения задачи.

1. $l \subset \Sigma \perp P_2$ (через прямую l проводим вспомогательную секущую фронтально-проецирующую плоскость Σ).

2. $\Sigma \cap \Gamma(ABC) = 1-2$ (строим линию $1-2$ пересечения данной плоскости $\Gamma(ABC)$ и вспомогательной плоскости Σ).

3. $l \cap (1-2) = K$ (отмечаем искомую точку K). Задача решена.

Результат построения не изменится, если в первом действии алгоритма через прямую l будет проведена другая вспомогательная секущая плоскость, например, горизонтально-проецирующая (проверить самостоятельно).

3.1.3. Определение видимости на чертеже

Плоскость треугольника ABC считается непрозрачной. Проекция прямой l частично будут невидимы (“закрыты” от зрителя непрозрачным треугольником). Поэтому для полного решения первой позиционной задачи надо не только найти точку K пересечения прямой с плоскостью, но и показать на чертеже видимые участки этой прямой (*определить видимость*). Для определения видимости проекций прямой l применяют способ конкурирующих точек (см. п. 2.2.6).

Чтобы определить видимость на горизонтальной плоскости проекций, берем какую-либо пару горизонтально-конкурирующих точек, например, горизонтально-конкурирующие точки 1 и 2 (рис. 3.3). Точка 1 находится на стороне AB треугольника, точка 2 – на прямой l . Точка 2 расположена *выше* точки 1 , поэтому прямая l проходит *над* стороной AB . Следовательно, на горизонтальной проекции левый участок прямой l – видимый. В точке K прямая l пересекается с плоскостью треугольника. Поэтому на горизонтальной проекции правый участок прямой l – невидимый.

Чтобы определить видимость фигур на фронтальной плоскости проекций, берем какую-либо пару фронтально-конкурирующих точек, например, пару точек 3 и 4 (см. рис. 3.3). Точка 3 находится на стороне BC треугольника, точка 4 – на прямой l . Точка 3 расположена *перед* точкой 4 , поэтому на фронтальной проекции сторона BC треугольника проходит *перед* прямой l . В этом

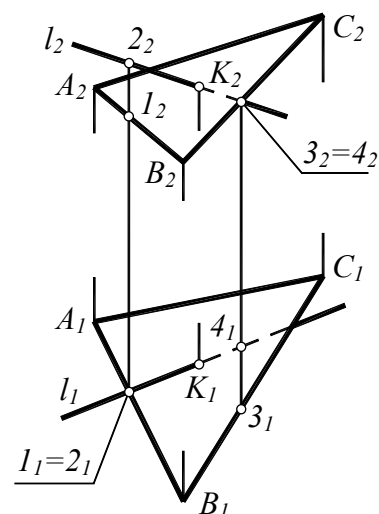


Рис. 3.3

месте треугольник закрывает от зрителя прямую l . Поэтому правая часть фронтальной проекции прямой l – невидимая. В точке K прямая l пересекается с плоскостью треугольника, поэтому левый участок фронтальной проекции прямой l – видимый.

3.2. Вторая позиционная задача (простейший случай)

Второй позиционной задачей в простейшем случае называют построение линии пересечения двух плоскостей общего положения.

Вторая позиционная задача. На чертеже заданы плоскости общего положения $\Gamma(a \cap b)$ и $\Delta(c \cap d)$ (рис. 3.4). Построить линию их пересечения.

Две плоскости пересекаются по прямой линии. Прямая линия вполне определена двумя своими точками. Поэтому для построения линии пересечения плоскостей надо найти всего две общие точки этих плоскостей. Рассмотрим решение задачи *способом вспомогательных секущих плоскостей*.

Чтобы найти одну общую точку данных плоскостей, проводим произвольную вспомогательную секущую плоскость Σ (на рис. 3.4 плоскость Σ выбрана горизонтально-проецирующей). Эта вспомогательная плоскость “разрезает” заданные плоскости Γ и Δ по прямым $l=1-2$ и $m=3-4$. Линии разреза пересекаются между собой в точке N , принадлежащей одновременно обеим заданным плоскостям Γ и Δ .

Чтобы найти еще одну общую точку заданных плоскостей, надо провести еще одну вспомогательную секущую плоскость Θ . На рис. 3.4 вспомогательная плоскость Θ проведена параллельно вспомогательной плоскости Σ . Снова вычерчиваем две линии разреза l', m' и отмечаем точку K их пересечения. Точка K принадлежит обеим данным плоскостям Γ и Δ . Прямая NK – искомая линия пересечения данных плоскостей.

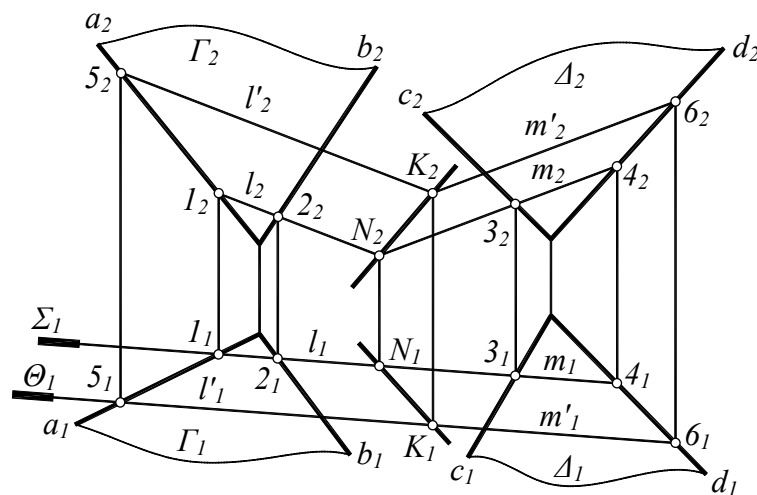


Рис. 3.4

Сформулируем схему решения задачи.

1. Проводим (и обязательно указываем на чертеже!) вспомогательную секущую плоскость, пересекающую заданные плоскости. В качестве вспомогательной секущей плоскости обычно используют проецирующую плоскость или плоскость уровня.

2. Определяем линии разреза обеих заданных плоскостей вспомогательной секущей плоскостью.

3. Отмечаем точку пересечения найденных линий разреза. Полученная точка принадлежит обеим плоскостям, поэтому через нее пройдет искомая линия пересечения заданных плоскостей.

4. Вторая общая точка заданных плоскостей определяется аналогично: проводим еще одну вспомогательную секущую плоскость и снова повторяем действия 1...3. Через две общие точки двух плоскостей проходит искомая линия пересечения этих плоскостей.

Запишем последовательность решения задачи в виде алгоритма.

Алгоритм построения точки N (см. рис. 3.4)

1. $\Sigma \perp \Pi_l$ (проводим вспомогательную секущую горизонтально-проецирующую плоскость Σ).
2. $\Sigma \cap \Gamma = l$; $\Sigma \cap \Delta = m$ (определяем линии разреза $l=1-2$ и $m=3-4$ заданных плоскостей Γ и Δ вспомогательной секущей плоскостью Σ).
3. $l \cap m = N$ (отмечаем точку пересечения найденных линий разреза). Точка N принадлежит обоим заданным плоскостям Γ и Δ , поэтому через нее пройдет искомая линия пересечения заданных плоскостей.

Алгоритм построения точки K (см. рис. 3.4)

1. $\Theta \perp \Pi_l$ (проводим вспомогательную секущую горизонтально-проецирующую плоскость Θ). Плоскость Θ проведена параллельно плоскости Σ . Такой выбор секущей плоскости Θ позволяет несколько упростить последующее построение линий разреза, так как параллельные между собой секущие плоскости Σ и Θ пересекают любую плоскость по параллельным прямым.
2. $\Theta \cap \Gamma = l'$; $\Theta \cap \Delta = m'$ (определяем линии разреза l' и m' заданных плоскостей Γ и Δ вспомогательной секущей плоскостью Θ). Секущая плоскость Θ параллельна секущей плоскости Σ , поэтому линии l' и m' параллельны линиям l и m .
3. $l' \cap m' = K$ (отмечаем точку пересечения найденных линий разреза). Точка K принадлежит обоим заданным плоскостям Γ и Δ , поэтому через точку K и ранее найденную точку N проходит искомая линия пересечения заданных плоскостей. Задача решена.

3.3. Построение линии пересечения двух плоских фигур

Задача. Даны две плоские фигуры общего положения: треугольник ABC и треугольник DEF (рис. 3.5). Требуется построить линию их пересечения (решить вторую позиционную задачу).

Напомним, что в соответствии со схемой решения второй позиционной задачи надо провести произвольную секущую плоскость, начертить линии разреза данных треугольников, а затем отметить точку пересечения найденных линий разреза. Отмеченная точка – общая для обоих треугольников. Еще одна произвольная секущая плоскость даст еще одну общую точку двух треугольников. Соединяя найденные точки, получаем искомую линию пересечения данных фигур.

Но можно поступить немного иначе: найти точку пересечения какой-нибудь стороны одного треугольника с плоскостью другого треугольника (по схеме решения первой позиционной задачи). Для этого надо провести секущую плоскость не произвольно, а через какую-нибудь сторону одного из треугольников. Например, про-

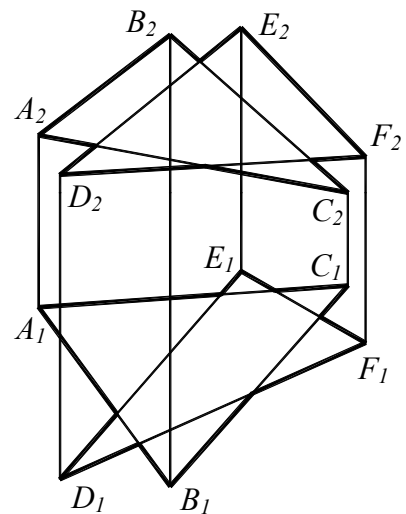


Рис. 3.5

ведем секущую плоскость Σ через сторону DE треугольника DEF (рис. 3.6, а). Плоскость Σ разрежет треугольник ABC по линии $1-2$. Отметим точку M пересечения сторо-

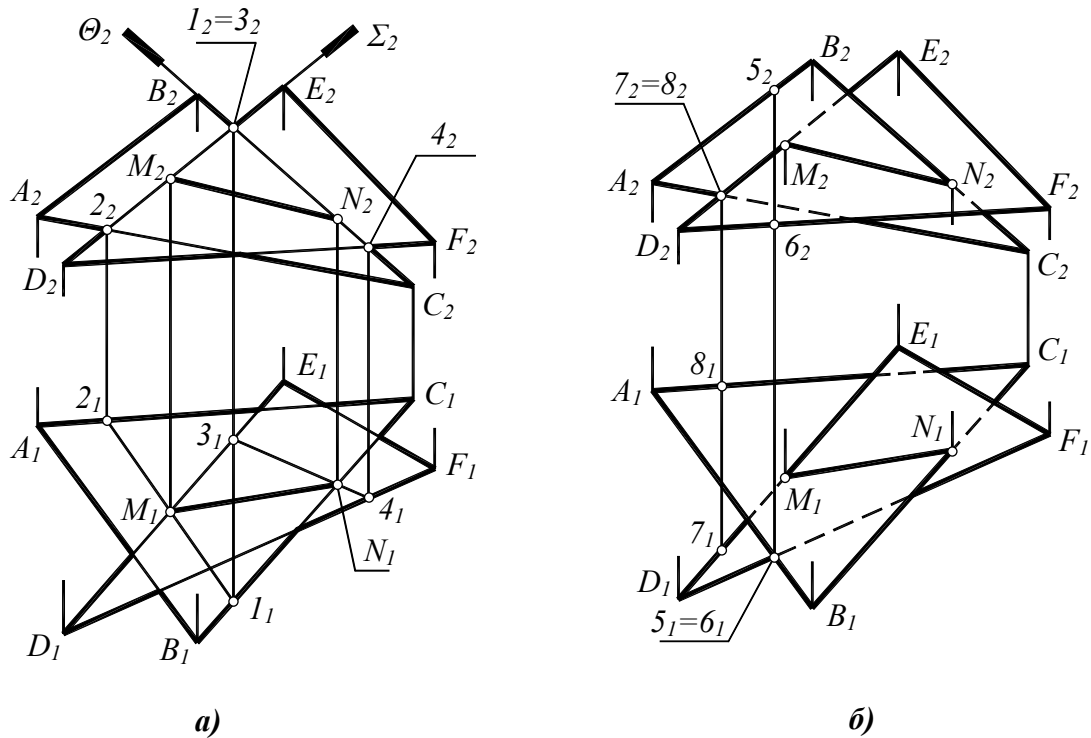


Рис. 3.6

ны DE и линии $1-2$. Точка M – общая точка данных треугольников.

Еще одну секущую плоскость проведем через какую-нибудь другую сторону одного из треугольников. Например, через сторону BC проведем фронтально-проецирующую плоскость Θ . Повторяя алгоритм решения первой позиционной задачи, найдем точку N пересечения стороны BC с треугольником DEF (см. рис. 3.6, а). Соединяя точку N с ранее найденной точкой M , получаем искомую линию MN пересечения треугольников.

Таким образом, можно построить линию пересечения двух плоских фигур, дважды решив первую позиционную задачу. Запишем алгоритмы построения точек M и N .

Алгоритм построения точки M (см. рис. 3.6, а)

1. $\Sigma \supset DE$, $\Sigma \perp \Pi_2$ (через прямую DE проводим вспомогательную фронтально-проецирующую плоскость Σ).
2. $\Sigma \cap ABC = 1-2$ (вспомогательная плоскость Σ разрезает треугольник ABC по линии $1-2$).
3. $M = DE \cap (1-2)$ (отмечаем точку пересечения прямой DE и линии $1-2$). В точке M прямая DE пересекается с плоскостью треугольника ABC .

Алгоритм построения точки N (см. рис. 3.6, а)

1. $\Theta \supset BC$, $\Theta \perp \Pi_2$ (через прямую BC проводим вспомогательную фронтально-проецирующую плоскость Θ).
2. $\Theta \cap DEF = 3-4$ (вспомогательная плоскость Θ разрезает треугольник DEF по линии $3-4$).

3. $N=BC \cap (3-4)$ (отмечаем точку пересечения прямой BC и линии $3-4$). Найденная точка N – точка пересечения стороны BC с треугольником DEF .

Отрезок MN , соединяющий найденные точки M, N – искомая линия пресечения данных треугольников ABC и DEF .

Видимость проекций фигур

Кроме линии пересечения данных треугольников, на чертеже обязательно показывают “видимость” их проекций, так как обе фигуры считаются непрозрачными. Видимость определяется с помощью конкурирующих точек (см. лекцию 2).

Для выявления видимости на горизонтальной плоскости проекций отмечаем пару каких-нибудь горизонтально-конкурирующих точек, например, 5 и 6 (рис. 3.6, б). Точка 5, лежащая на стороне AB , располагается *выше* точки 6, лежащей на стороне DF . Значит, сторона AB треугольника ABC *выше* стороны DF треугольника DEF . Поэтому сторона AB на горизонтальной проекции – *видимая*. Этого достаточно, чтобы определить видимость всех сторон данных треугольников на горизонтальной плоскости проекций.

Для выявления видимости на фронтальной плоскости проекций отмечаем пару каких-нибудь фронтально-конкурирующих точек, например, 7 и 8 (см. рис. 3.6, б). Точка 7, лежащая на стороне DE , располагается *перед* точкой 8, лежащей на стороне AC . Значит, сторона DE треугольника DEF находится *перед* стороной AC треугольника ABC . Поэтому левая часть стороны DE (до точки M) на фронтальной проекции – *видимая*. Этого достаточно, чтобы определить видимость всех сторон данных треугольников на фронтальной плоскости проекций.

Вопросы для повторения

1. Какие геометрические задачи называют позиционными?
2. В чем состоит различие первой и второй позиционных задач?
3. Почему задачи на построение общих элементов прямых линий и плоскостей называют *простейшими* позиционными задачами?
4. Сформулировать схему решения первой позиционной задачи.
5. Сформулировать схему решения второй позиционной задачи.
6. Можно ли для решения второй позиционной задачи использовать схему решения первой позиционной задачи? Как это сделать?
7. Что называется алгоритмом?
8. Как определяется видимость проекций фигур на комплексном чертеже?