Лекция 2

ЧЕРТЕЖИ ПРОСТЕЙШИХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФИГУР

В 1784 году английский изобретатель Дж. Уатт разработал и запатентовал первую универсальную паровую машину. С небольшими усовершенствованиями она более ста лет оставалась единственным промышленным двигателем: приводила в движение станки и паровозы, пароходы и даже первые автомобили. Вызванная изобретением паровой машины научно-техническая революция и последующее развитие промышленного производства потребовало разработки простых и точных изображений деталей машин и механизмов.

Французский математик и инженер Г. Монж (1746 – 1818 гг.) предложил получать чертежи пространственных предметов путем их ортогонального проецирования на две или три взаимно перпендикулярные плоскости проекций. Совокупность двух или более взаимосвязанных ортогональных проекций предмета, расположенных на одной плоскости, называют *комплексным чертежом*. Рассмотрим комплексные чертежи основных геометрических фигур трехмерного пространства – точки, прямой и плоскости.

2.1. Комплексный чертеж точки

На рис. 2.1 изображена прямоугольная (декартова) система координат xyz. Координатную плоскость xy называют *горизонтальной плоскостью проекций* Π_1, плоскость xz называют *фронтальной плоскостью проекций* Π_2, плоскость yz – *профильной плоскостью проекций* Π_3. Ортогонально проецируя точку A на плоскости проекций Π_1, Π_2, Π_3, получают горизонтальную A_1, фронтальную A_2 и профильную A_3 проекции точки.

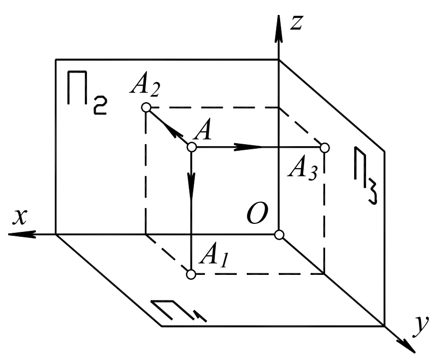


Рис. 2.1

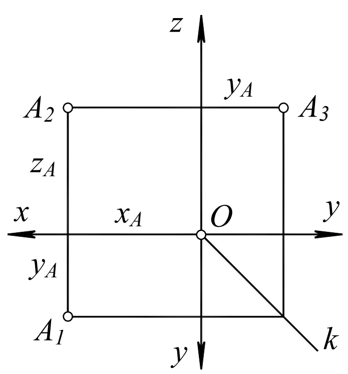


Рис. 2.2

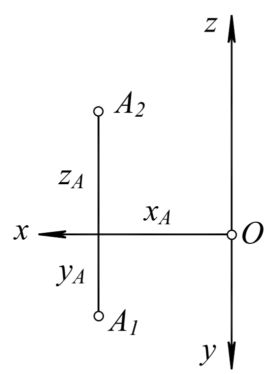


Рис. 2.3

Мысленно повернем плоскость Π_1 вокруг оси x, а плоскость Π_3 – вокруг оси z до совмещения этих плоскостей с плоскостью Π_2. Получаем комплексный *трехпроекционный* чертеж точки (рис. 2.2). На этом чертеже проекции точки соединены тонкими линиями, которые называют *линиями связи*. Запишем условия связи между проекциями.

1.Фронтальная A_2 и горизонтальная A_1 проекции точки соединены вертикальной линией связи.

2.Фронтальная A_2 и профильная A_3 проекции точки соединены горизонтальной линией связи.

3.Горизонтальная A_1 и профильная A_3 проекции точки соединены ломаной линией связи. Точка излома этой линии находится на прямой k, которую называют *постоянной* *прямой чертежа*. Постоянная прямая k проходит через начало координат и составляет 45^o с осью x.

На рис. 2.3 показан комплексный *двухпроекционный* чертеж этой же точки A. Двух проекций достаточно, чтобы по чертежу определить координаты x_A, y_A, z_A точки A, то есть двухпроекционный чертеж обладает свойством обратимости.

Трехпроекционный чертеж (см. рис. 2.2) содержит избыточную информацию. Действительно, зная две проекции точки, например, A_1 и A_2, нетрудно построить ее третью проекцию A_3 с помощью условий связи.

2.2. Комплексные чертежи прямых линий

Аксиома. *Через две различные точки пространства проходит единственная прямая линия*. Следовательно, положение прямой линии в пространстве вполне определяется двумя ее точками.

Прямая линия проецируется в прямую линию. Чтобы на комплексном чертеже задать прямую линию, достаточно указать проекции двух ее точек A, B. Проекции прямой пройдут через одноименные проекции точек A, B.

Прямая линия может занимать в пространстве различные положения относительно плоскостей проекций Π_1, Π_2, Π_3. Если прямая не параллельна и не перпендикулярна ни одной из плоскостей проекций, то ее называют прямой *общего положения*. Если прямая параллельна или перпендикулярна какой-либо плоскости проекций, то такую прямую называют прямой *частного положения*.

2.2.1. Комплексный чертеж прямой общего положения

Прямая l общего положения не параллельна и не перпендикулярна ни одной из плоскостей проекций. Зададим на чертеже две точки A и B, разности координат которых по осям x, y, z не равны нулю (рис. 2.4):

$$\Delta x=x_B-x_A\neq 0,\ \ \Delta y=y_B-y_A\neq 0,\ \ \Delta z=z_B-z_A\neq 0.$$

Соединяя одноименные проекции A_1, B_1 и A_2, B_2, получаем проекции прямой общего положения: $l_1=A_1B_1$, $l_2=A_2B_2$.

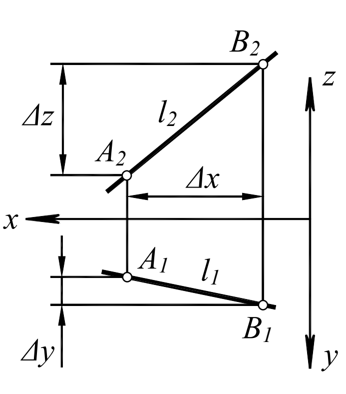


Рис. 2.4

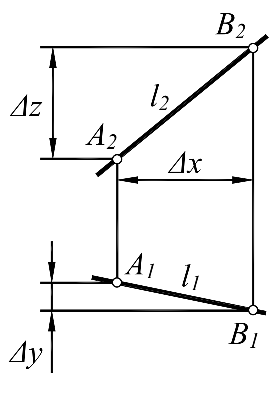


Рис. 2.5

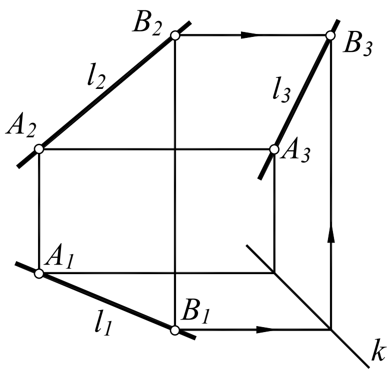


Рис. 2.6

На чертеже рис. 2.4 показаны оси координат x, y, z. Такой чертеж называют *осным чертежом*. Оси координат на чертеже играют роль базы для отсчета расстояний от фигуры до фиксированных плоскостей проекций. В технической практике обычно в этом нет необходимости, так как для определения формы и размеров предмета важно знать лишь относительное расположение отдельных его точек. Поэтому на чертеже, как правило, не указывают оси координат. Чертеж, на котором не показаны оси координат, называют *безосным чертежом*.

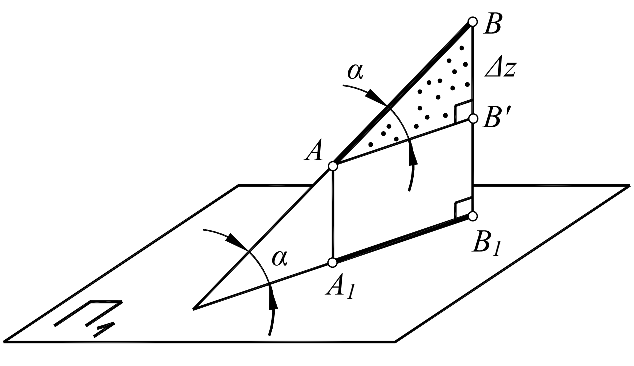
На рис. 2.5 дан безосный чертеж прямой общего положения l, проходящей через точки A, B. Такой чертеж обратим, так как с его помощью можно точно определить относительное положение точек A, B: точка B *выше* точки A на величину Δz, точка A *левее* точки B на величину Δx, точка B *перед* точкой A на величину Δy.

Для построения третьей проекции на безосном чертеже используют условия связи между проекциями. Третью проекцию какой-либо точки, например, точки A, указывают на горизонтальной линии связи, идущей от A_2. Расстояние между A_2 и A_3 выбирается произвольно (рис. 2.6). Затем чертят ломаную линию связи, соединяющую проекции A_1 и A_3. Через точку излома проводят постоянную прямую чертежа k. Третья проекция B_3 точки B будет найдена на пересечении двух линий связи: горизонтальной B_2B_3 и ломаной B_1B_3.

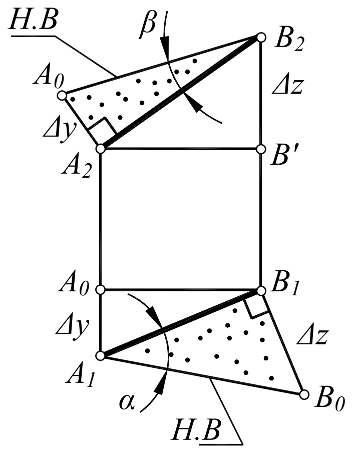
2.2.2. Определение натуральной величины отрезка способом прямоугольного треугольника

На рис. 2.7, *а* показан произвольно расположенный в пространстве отрезок AB и его горизонтальная проекция A_1B_1. Длина проекции меньше, чем истинная длина отрезка: $A_1B_1=AB\cos\alpha$, где угол α – угол наклона отрезка к плоскости Π_1 (см. п. 1.3).

Рассмотрим прямоугольный треугольник $AB'B$ (см. рис. 2.7, *а*). Один его катет (катет AB') равен горизонтальной проекции A_1B_1 отрезка AB, другой катет (катет BB') равен разности высот Δz концов отрезка. Гипотенуза этого треугольника – сам отрезок AB. Угол α, противолежащий катету Δz, равен истинному углу наклона отрезка к горизонтальной плоскости проекций.



а)



б)

Рис. 2.7

Построим на двухпроекционном чертеже отрезка вспомогательный прямоугольный треугольник $A_1B_1B_0$ (рис. 2.7, *б*). Катет A_1B_1 этого треугольника совпадает с горизонтальной проекцией отрезка AB, а катет B_1B_0 равен разности высот Δz концов отрезка.

Катеты треугольника $A_1B_1B_0$ на рис. 2.7, *б* равны катетам треугольника $AB'B$ на рис. 2.7, *а*. Поэтому гипотенуза A_1B_0 вспомогательного треугольника $A_1B_1B_0$ равна гипотенузе треугольника $AB'B$, а следовательно – равна истинной длине отрезка AB. Угол α во вспомогательном треугольнике $A_1B_1B_0$, противолежащий катету $B_1B_0=\Delta z$, равен истинному углу наклона отрезка к горизонтальной плоскости проекций.

Таким образом, *истинная длина отрезка AB равна гипотенузе прямоугольного треугольника, один катет которого совпадает с горизонтальной проекцией отрезка, а другой катет равен разности высот концов отрезка.*

Горизонтальная и фронтальная плоскости проекций вполне “равноправны”, поэтому для определения длины отрезка можно построить вспомогательный прямоугольный треугольник $A_2B_2A_0$, один из катетов которого совпадает не с горизонтальной, а с фронтальной проекцией A_2B_2 отрезка. При этом в качестве другого катета A_2A_0 следует взять не разность высот, а разность глубин Δy концов отрезка. Гипотенуза построенного таким образом прямоугольного треугольника также равна истинной длине отрезка AB, а угол β, противолежащий катету Δy, равен истинному углу наклона отрезка к фронтальной плоскости проекций Π_2 (см. рис. 2.7, *б*).

Рассмотренное построение формулируется в виде следующего правила.

Чтобы определить истинную длину отрезка AB прямой общего положения и углы его наклона к плоскостям проекций Π_1, Π_2 *, надо на чертеже построить два вспомогательных прямоугольных треугольника. Катеты одного треугольника: горизонтальная проекция* A_1B_1 *и разность высот* Δz *концов отрезка. Катеты другого треугольника: фронтальная проекция* A_2B_2 *и разность глубин* Δy *концов отрезка. Гипотенузы этих треугольников равны между собой и равны истинной длине отрезка, а углы, противолежащие катетам* Δz *и* Δy*, равны углам наклона отрезка к плоскостям* Π_1 *и* Π_2 *соответственно.*

2.2.3. Построение отрезка заданной длины

В некоторых задачах требуется не просто определить истинную длину данного на чертеже отрезка, а начертить отрезок заранее заданной длины, лежащий на данной прямой. Такое построение также выполняется способом прямоугольного треугольника.

Задача. *На комплексном двухпроекционном чертеже дана прямая l общего положения и точка A на ней (рис. 2.8). Требуется вдоль данной прямой от точки A отложить отрезок заданной длины m.*

Решение. Отмечаем на прямой l произвольную точку R. На горизонтальной проекции отрезка строим прямоугольный треугольник $A_1R_1R_0$, катет которого R_1R_0 равен разности высот Δz точек A и R. Гипотенуза A_1R_0 треугольника $A_1R_1R_0$ равна истинной длине отрезка AR. Откладываем вдоль гипотенузы A_1R_0 расстояние m и отмечаем точку B_0. “Возвращая” точку B_0 на проекции данной прямой, получаем чертеж отрезка AB, длина которого равна заданной величине m.

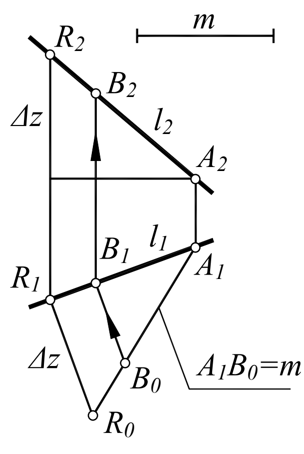


Рис. 2.8

2.2.4. Комплексные чертежи прямых частного положения

Прямые частного положения разделяются на две группы: прямые уровня и проецирующие прямые.

Прямая уровня – прямая, параллельная одной из плоскостей проекций.

Проецирующая прямая – прямая, перпендикулярная одной из плоскостей проекций.

2.2.4.1. *Прямые уровня*

Горизонталь h – прямая, параллельная горизонтальной плоскости проекций $П_1$ (рис. 2.9). Отрезок AB горизонтали и угол β ее наклона к фронтальной плоскости проекций проецируются на $П_1$ в натуральную величину.

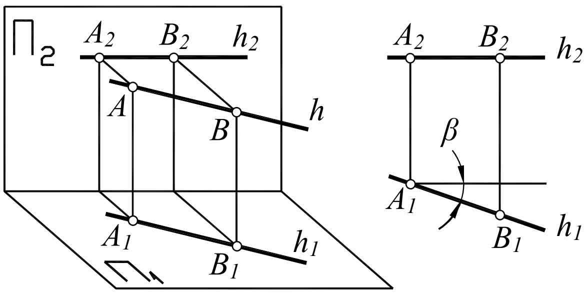


Рис. 2.9. Горизонталь

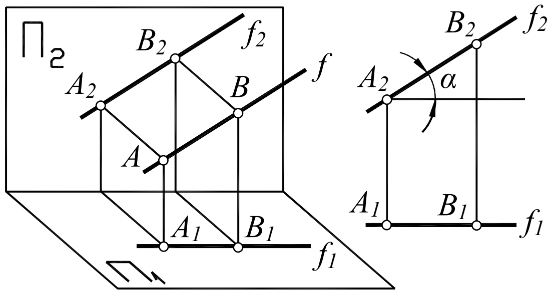


Рис. 2.10. Фронталь

Фронталь f – прямая линия, параллельная фронтальной плоскости проекций $П_2$ (рис. 2.10). Отрезок AB фронтали и угол α ее наклона к горизонтальной плоскости проекций проецируются на $П_2$ в натуральную величину.

Профильная прямая p – прямая линия, параллельная профильной плоскости проекций $П_3$ (рис. 2.11). Отрезок AB профильной прямой, а также углы α и β наклона этой прямой к плоскостям $П_1$ и $П_2$ проецируются на плоскость $П_3$ в натуральную величину. Отрезок AB профильной прямой рекомендуется изображать на чертеже в трех проекциях, как показано на рис. 2.11. В этом случае чертеж становится более наглядным.

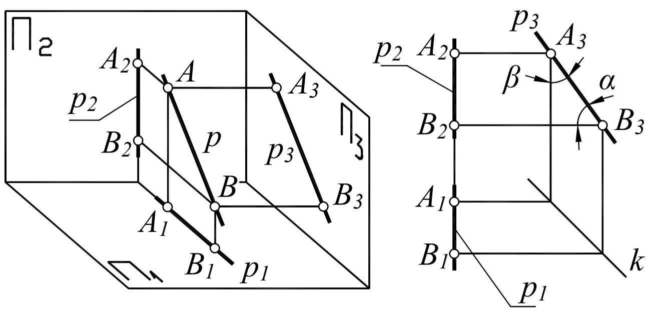


Рис. 2.11. Профильная прямая

2.2.4.2. *Проецирующие прямые*

Горизонтально-проецирующая прямая – прямая q, перпендикулярная горизонтальной плоскости проекций $П_1$ (рис. 2.12). Горизонтальная проекция q_1 этой прямой вырождается в точку.

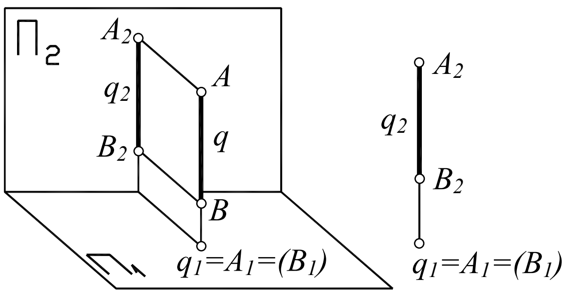


Рис. 2.12. Горизонтально-проецирующая прямая

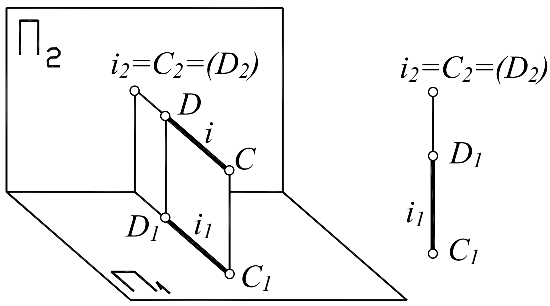


Рис. 2.13. Фронтально-проецирующая прямая

Точки A и B на прямой q называют *горизонтально-конкурирующими*, так как они “конкурируют” друг с другом относительно горизонтальной плоскости проекций: точка A *выше* точки B. При взгляде сверху точка A заслоняет точку B. Говорят, что горизонтальная проекция точки B “невидима”, так как она закрыта горизонтальной проекцией точки A. Поэтому на чертеже (см. рис. 2.12) проекция B_1 точки B заключена в скобки. Горизонтально-конкурирующие точки применяют для определения видимости проекций геометрических фигур на плоскости $П_1$.

Фронтально-проецирующая прямая – прямая i, перпендикулярная фронтальной плоскости проекций $П_2$ (рис. 2.13). Фронтальная проекция i_2 этой прямой вырождается в точку.

Точки C и D на прямой i называют фронтально-конкурирующими, так как они “конкурируют” друг с другом относительно фронтальной плоскости проекций: точка C находится *перед* точкой D. При взгляде спереди точка C заслоняет точку D, то есть фронтальная проекция точки D невидима. Поэтому на чертеже (см. рис. 2.13) проекция D_2 точки D заключена в скобки. Фронтально-конкурирующие точки применяют для определения видимости проекций геометрических фигур на плоскости $П_2$.

Профильно-проецирующая прямая – прямая j, перпендикулярная профильной плоскости проекций $П_3$ (рис. 2.14). Профильная проекция j_3 этой прямой вырождается в точку.

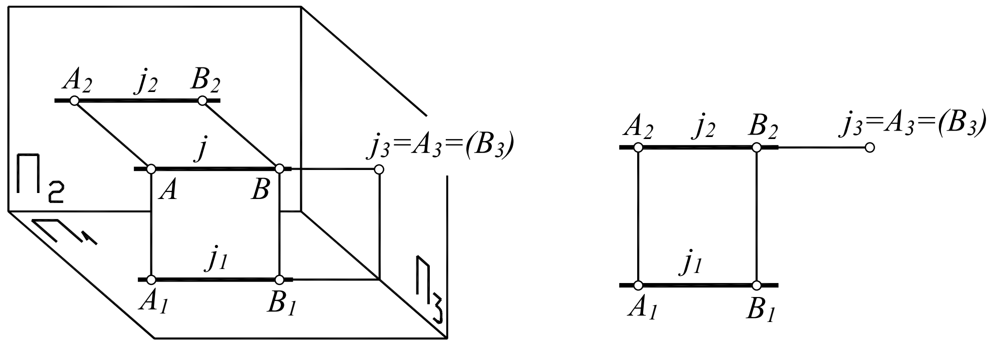


Рис. 2.14. Профильно-проецирующая прямая

Точки A и B на прямой j называют профильно-конкурирующими, так как они “конкурируют” друг с другом относительно профильной плоскости проекций: точка A *левее* точки B. При взгляде слева точка A заслоняет точку B, то есть профильная проекция точки B невидима. Поэтому на чертеже (см. рис. 2.14) проекция B_3 точки B заключена в скобки. Профильно-конкурирующие точки применяют для определения видимости проекций геометрических фигур на плоскости $П_3$.

2.2.5. Принадлежность точки к прямой линии

Если точка лежит на прямой, то проекции точки лежат на проекциях этой прямой. Например, точка C на рис. 2.15 лежит на прямой a, так как проекции C_1 и C_2 точки C лежат на проекциях a_1 и a_2 прямой a. Точки *1* и *2* также принадлежат прямой a.

Точки A, B, D не лежат на прямой a. Точка A и точка *1* – горизонтально-конкурирующие точки, причем точка A *выше* точки *1*. Значит, точка A находится *выше* прямой a. Точки B и *2* – фронтально-конкурирующие, причем точка B находится *перед* точкой *2*. Значит, точка B находится *перед* прямой a.

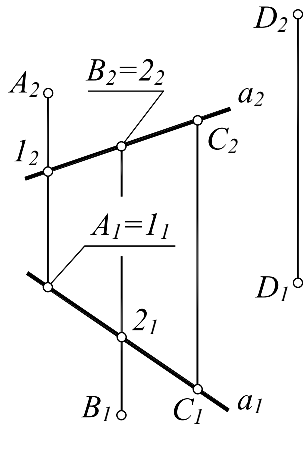


Рис. 2.15

2.2.6. Относительное положение двух прямых

Две прямые в пространстве могут *пересекаться*, быть *параллельными* (то есть пересекаться в несобственной точке) или *скрещиваться*.

На рис. 2.16 показан чертеж прямых a и b, пересекающихся в точке K. Проекции K_1 и K_2 точки K находятся на одной вертикальной линии связи.

На рис. 2.17 представлен чертеж параллельных прямых m и n. Одноименные проекции этих прямых параллельны, следовательно, прямые m и n параллельны.

На рис. 2.18 показан чертеж двух скрещивающихся прямых c и d. Прямые называют скрещивающимися, если они не пересекаются и не параллельны.

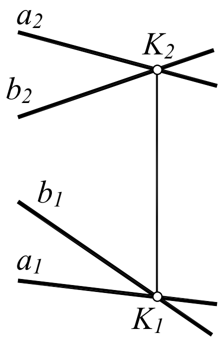


Рис. 2.16

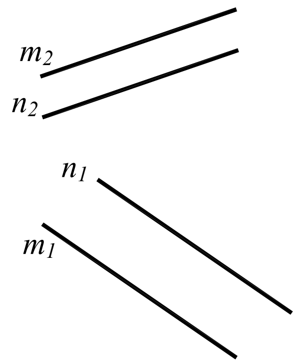


Рис. 2.17

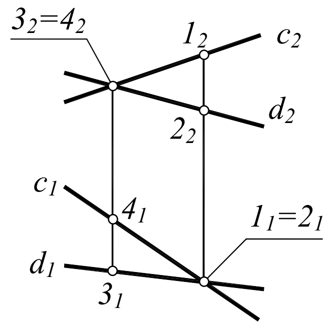


Рис. 2.18

Если две прямые скрещиваются, то с помощью горизонтально-конкурирующих точек можно определить, какая прямая *выше* другой. Например, на рис. 2.18 показана пара горизонтально-конкурирующих точек *1* и *2*. Точка *1*, принадлежащая прямой c, расположена выше точки *2*, лежащей на прямой d. Следовательно, прямая c располагается в пространстве *выше*, чем прямая d (прямая c проходит *над* прямой d).

С помощью фронтально-конкурирующих точек определяют, какая из двух скрещивающихся прямых находится *перед* другой. Например, на рис. 2.18 отмечены фронтально-конкурирующие точки *3* и *4*. Точка *3*, лежащая на прямой d, располагается перед точкой *4*, лежащей на прямой c. Следовательно, прямая d – *перед* прямой c.

2.3. Комплексный чертеж плоскости

Аксиома. *Через три различные точки пространства, не лежащие на одной прямой, проходит единственная плоскость*. Следовательно, положение плоскости в пространстве вполне определяется тремя ее точками. Чтобы на комплексном чертеже задать плоскость, надо указать проекции трех точек A, B, C, принадлежащих этой плоскости (рис. 2.19).

Но такой чертеж лишен наглядности. Чтобы сделать чертеж плоскости более наглядным, можно соединить заданные точки A, B, C отрезками прямых (рис. 2.20). В результате получается чертеж плоской фигуры (треугольника). Следовательно, плоскость на чертеже может быть задана проекциями плоской фигуры.

Если соединить отрезком прямой только пару точек A, C, то получим чертеж прямой линии AC и точки B, которые вполне определяют положение плоскости в пространстве (рис. 2.21). Поэтому плоскость на чертеже может быть задана прямой линией и точкой.

Если плоскость на чертеже задана треугольником ABC, то одну из сторон треугольника можно стереть. Получим чертеж двух пересекающихся прямых, которые фиксируют положение плоскости в пространстве. Следовательно, плоскость на чертеже может быть задана двумя пересекающимися прямыми (рис. 2.22).

Через две параллельные прямые в пространстве проходит единственная плоскость. Поэтому на чертеже плоскость может быть задана проекциями двух параллельных прямых m, n (рис. 2.23).

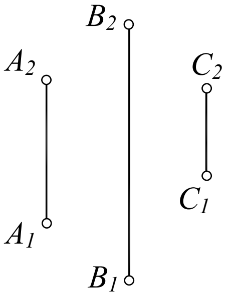


Рис. 2.19

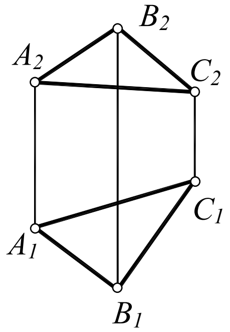


Рис. 2.20

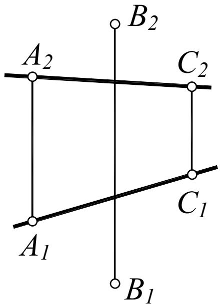


Рис. 2.21

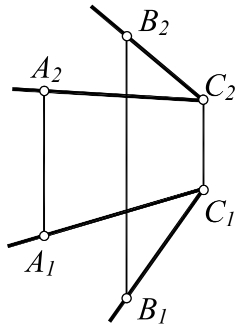


Рис. 2.22

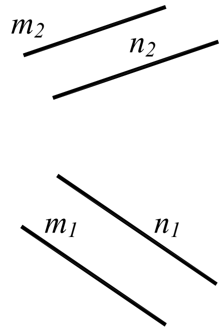


Рис. 2.23

Таким образом, из основного способа задания плоскости (проекциями трех точек, рис. 2.19) следуют еще четыре способа, позволяющие более наглядно изобразить плоскость на чертеже:

- проекциями плоской фигуры (см. рис. 2.20);
- проекциями прямой и точки (см. рис. 2.21);
- проекциями двух пересекающихся прямых (см. рис. 2.22);
- проекциями двух параллельных прямых (см. рис. 2.23).

Плоскость может занимать в пространстве различные положения относительно плоскостей проекций Π_1, Π_2, Π_3. Если плоскость не параллельна и не перпендикулярна ни одной из плоскостей проекций, то ее называют *плоскостью общего положения*. Если плоскость параллельна или перпендикулярна какой-либо плоскости проекций, то такую плоскость называют *плоскостью частного положения*.

2.3.1. Прямые и точки, принадлежащие плоскости общего положения

Плоскость общего положения не параллельна и не перпендикулярна ни одной из плоскостей проекций. Пусть плоскость Σ общего положения задана на чертеже двумя пересекающимися прямыми a и b (рис. 2.24).

Для построения точки или прямой, принадлежащей данной плоскости, используют аксиому, известную из школьного курса геометрии [13]: *если две точки прямой лежат в плоскости, то все точки прямой лежат в этой плоскости*. Из этой аксиомы следуют признаки принадлежности точки и прямой к плоскости.

Признак 1. Точка лежит в плоскости, если она принадлежит прямой, лежащей в данной плоскости.

Признак 2. Прямая лежит в плоскости, если она проходит через две точки, лежащие в этой плоскости.

Признак 3. Прямая лежит в плоскости, если она проходит через какую-либо точку плоскости и при этом параллельна какой-либо прямой, лежащей в этой плоскости (то есть проходит через две точки плоскости, одна из которых несобственная).

Например, на рис. 2.24 точки *1* и *2* лежат в плоскости Σ, так как они принадлежат прямым a и b, лежащим в этой плоскости (признак 1). Прямая l, проходящая через точки *1* и *2*, принадлежит плоскости Σ (признак 2). На этом же чертеже показана прямая b', параллельная прямой b и проходящая через точку *3*, лежащую в плоскости Σ. Прямая b' также принадлежит плоскости Σ (признак 3).

Рассмотрим примеры применения признаков принадлежности в задачах начертательной геометрии.

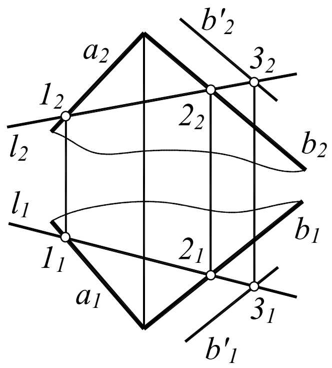


Рис. 2.24

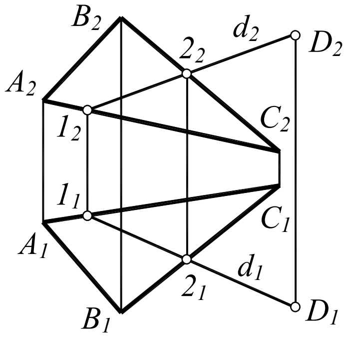


Рис. 2.25

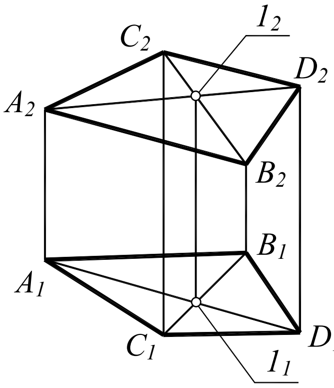


Рис. 2.26

Задача 1. *Плоскость Г задана на чертеже треугольником ABC (рис. 2.25). Дана фронтальная проекция D_2 точки D, принадлежащей плоскости Г(ABC). Построить горизонтальную проекцию D_1 точки D.*

В плоскости треугольника проводим прямую d, фронтальная проекция которой d_2 проходит через заданную проекцию D_2 точки D. Находим горизонтальную проекцию d_1 прямой d с помощью точек *1*, *2*, “прикрепляющих” прямую d к треугольнику ABC. Искомая горизонтальная проекция D_1 точки D находится на горизонтальной проекции d_1 прямой d.

Задача 2. *Построить чертеж плоского четырехугольника.*

Произвольно зададим на чертеже три вершины A, B, C искомого плоского четырехугольника (рис. 2.26). Одну из проекций четвертой вершины D также можно задать произвольно, но другая проекция точки D должна быть построена из условия принадлежности точки D плоскости ABC (см. рис. 2.25). Если построение выполнено правильно, то диагонали четырехугольника пересекутся между собой (точка *1* на рис. 2.26).

2.3.2. Главные линии плоскости

Главными линиями плоскости называют горизонталь h, фронталь f и профильную прямую p, лежащие в данной плоскости.

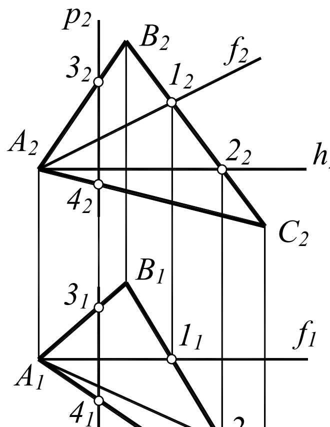


Рис. 2.27

Пусть плоскость Σ задана проекциями треугольника ABC (рис. 2.27). Через любую точку данной плоскости можно провести горизонталь, лежащую в этой плоскости. Например, надо начертить в плоскости Σ горизонталь, проходящую через точку A. Построение горизонтали h начинают с построения ее фронтальной проекции h_2. Координаты по оси z всех точек горизонтали одинаковы: $\Delta z=0$. Горизонтальную проекцию h_1 горизонтали строят из условия ее принадлежности данной плоскости $\Sigma(ABC)$.

Построение фронтали f, лежащей в плоскости Σ, начинают с построения горизонтальной проекции f_1 фронтали. Координаты по оси y всех точек фронтали одинаковы: $\Delta y=0$. Фронтальную проекцию f_2 фронтали строят из условия принадлежности ее к данной плоскости.

Профильная прямая p, принадлежащая данной плоскости, определяется точками *3* и *4*, принадлежащими данной плоскости и расположенными на равных расстояниях от плоскости проекций Π_3 (см. рис. 2.27). Координаты всех точек профильной прямой по оси x одинаковы: $\Delta x=0$.

В плоскости можно провести множество горизонталей, фронталей и профильных прямых. Все горизонтали данной плоскости параллельны между собой. Точно так же параллельны между собой все фронтали и все профильные прямые, лежащие в одной плоскости.

2.3.3. Комплексные чертежи плоскостей частного положения

Плоскости частного положения разделяются на две группы: проецирующие плоскости и плоскости уровня.

Проецирующая плоскость – плоскость, перпендикулярная одной из плоскостей проекций.

Плоскость уровня – плоскость, параллельная одной из плоскостей проекций.

2.3.3.1. Проецирующие плоскости

Горизонтально-проецирующая плоскость – плоскость, перпендикулярная горизонтальной плоскости проекций Π_1 (плоскость Σ на рис. 2.28). Горизонтальная проекция плоскости Σ вырождается в прямую линию Σ_1.

Фронтальная проекция этой плоскости представляет собой поле точек, совпадающее с полем Π_2, то есть $\Sigma_2 \equiv \Pi_2$. Горизонтальная проекция любой фигуры, лежащей в плоскости Σ (например, треугольника ABC) совпадает с горизонтальной проекцией Σ_1 плоскости Σ, то есть $A_1B_1C_1 \equiv \Sigma_1$.

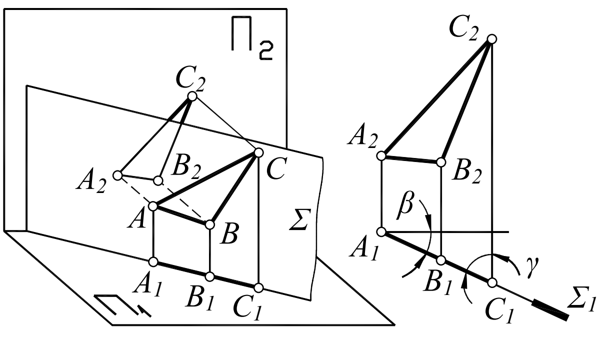


Рис. 2.28. Горизонтально-проецирующая плоскость

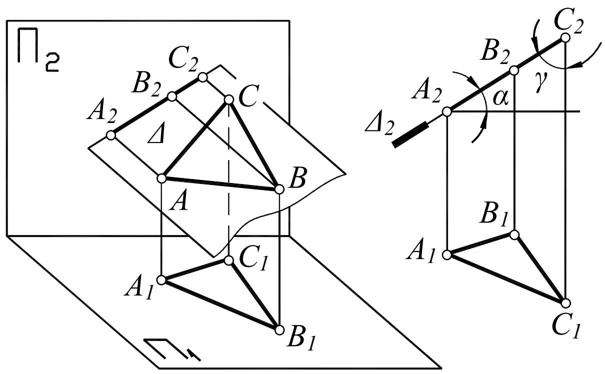


Рис. 2.29. Фронтально-проецирующая плоскость

Чтобы задать на чертеже горизонтально-проецирующую плоскость, достаточно указать ее горизонтальную проекцию Σ_1. При этом положение плоскости Σ в пространстве вполне определено, так как известны углы наклона β и γ этой плоскости к плоскостям проекций Π_2 и Π_3 (см. рис. 2.28).

Фронтально-проецирующая плоскость – плоскость, перпендикулярная фронтальной плоскости проекций Π_2 (плоскость Δ на рис. 2.29). Фронтальная проекция плоскости Δ вырождается в прямую линию Δ_2.

Горизонтальная проекция этой плоскости представляет собой поле точек, совпадающее с полем Π_1, то есть $\Delta_1 \equiv \Pi_1$. Фронтальная проекция фигуры, лежащей в плоскости Δ (например, треугольника ABC на рис. 2.29), совпадает с фронтальной проекцией Δ_2 плоскости Δ, то есть $A_2B_2C_2 \equiv \Delta_2$.

Чтобы задать на чертеже фронтально-проецирующую плоскость, достаточно указать только ее фронтальную проекцию Δ_2. При этом положение плоскости Δ в пространстве вполне определено, так как известны углы наклона α и γ этой плоскости к плоскостям проекций Π_1 и Π_3 (см. рис. 2.29).

Профильно-проецирующая плоскость – плоскость, перпендикулярная профильной плоскости проекций Π_3 (плоскость Θ на рис. 2.30).

Профильная проекция плоскости Θ вырождается в прямую линию Θ_3. Горизонтальная и фронтальная проекции этой плоскости представляют собой поля точек, совпадающие соответственно с точечными полями плоскостей проекций Π_1 и Π_2, то есть $\Theta_1 \equiv \Pi_1$, $\Theta_2 \equiv \Pi_2$.

Профильная проекция любой фигуры, лежащей в профильно-проецирующей плоскости Θ (например, треугольника ABC), совпадает с профильной проекцией Θ_3 плоскости Θ, то есть $A_3B_3C_3 \equiv \Theta_3$.

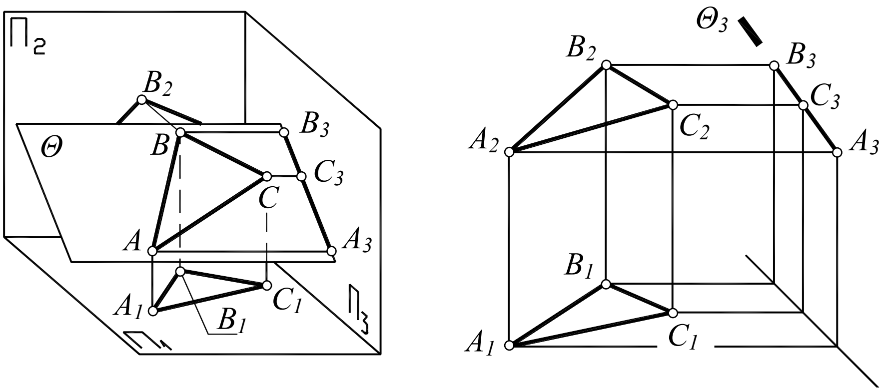


Рис. 2.30. Профильно-проецирующая плоскость

Чтобы задать на чертеже профильно-проецирующую плоскость, достаточно указать только ее профильную проекцию Θ_3. При этом положение плоскости Θ в пространстве вполне определено, так как углы наклона α, β этой плоскости к плоскостям Π_1 и Π_2 определяются по ее профильной проекции Θ_3 (отметить эти углы на рис. 2.30 самостоятельно).

2.3.3.2. Плоскости уровня

Горизонтальная плоскость уровня – плоскость, параллельная горизонтальной плоскости проекций Π_1 (плоскость Σ на рис. 2.31). Горизонтальная плоскость уровня Σ перпендикулярна плоскостям Π_2 и Π_3, то есть является дважды проецирующей плоскостью (фронтально и профильно).

Любая фигура, лежащая в горизонтальной плоскости уровня, проецируется на горизонтальную плоскость проекций Π_1 без искажения. Например, треугольник ABC, лежащий в плоскости Σ, проецируется на плоскость Π_1 в натуральную величину (см. рис. 2.31).

Фронтальная плоскость уровня – плоскость, параллельная фронтальной плоскости проекций $П_2$ (плоскость $Г$ на рис. 2.32). Фронтальная плоскость уровня $Г$ перпендикулярна плоскостям $П_1$ и $П_3$, то есть является дважды проецирующей плоскостью (го-

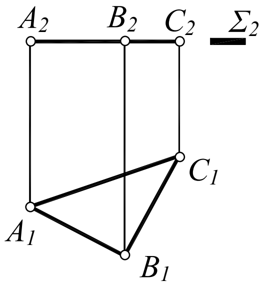


Рис. 2.31

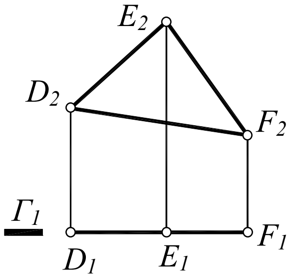


Рис. 2.32

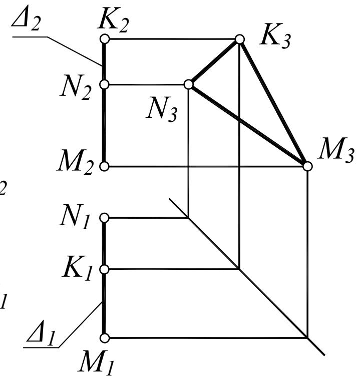


Рис. 2.33

ризонтально и профильно). Любая фигура, лежащая во фронтальной плоскости уровня, проецируется на $П_2$ без искажения. Например, треугольник DEF, лежащий в плоскости $Г$, проецируется на плоскость $П_2$ в натуральную величину (см. рис. 2.32).

Профильная плоскость уровня – плоскость, параллельная профильной плоскости проекций $П_3$ (плоскость Δ на рис. 2.33). Профильная плоскость уровня Δ перпендикулярна плоскостям $П_1$ и $П_2$, то есть является дважды проецирующей плоскостью (горизонтально и фронтально). Любая фигура, лежащая в профильной плоскости уровня, проецируется на $П_3$ без искажения. Например, треугольник MNK, лежащий в плоскости Δ, проецируется на плоскость $П_3$ в натуральную величину (см. рис. 2.33).

2.3.4. Параллельность прямой и плоскости, двух плоскостей

Определение. *Плоскость и прямая называются параллельными, если они пересекаются в несобственной точке* (см. п. 1.1). Отсюда следует **теорема** [13]: *если прямая, не лежащая в данной плоскости, параллельна какой-нибудь прямой, лежащей в этой плоскости, то она параллельна данной плоскости* (доказать самостоятельно).

Пусть через точку M требуется провести прямую, параллельную данной плоскости $Г$. Плоскость $Г$ задана на чертеже треугольником ABC (рис. 2.34). Начертим в плоскости $Г$ произвольную прямую (например, прямую CK) и проведем через точку M прямую l, параллельную прямой CK. Прямая l параллельна плоскости $Г$.

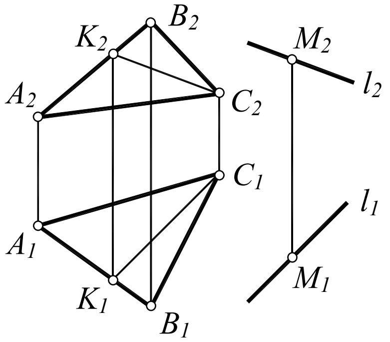


Рис. 2.34

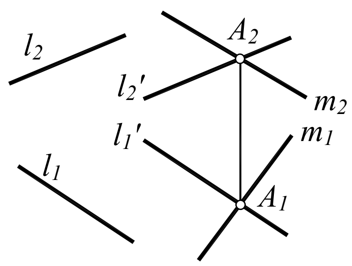


Рис. 2.35

Пусть через прямую m надо провести плоскость, параллельную данной прямой l (рис. 2.35). Через произвольную точку A на прямой m проведем прямую l', параллельную прямой l. Две пересекающиеся прямые m и l' определяют плоскость, параллельную прямой l.

Определение. *Две плоскости называются параллельными, если они пересекаются по несобственной прямой* (см. п. 1.1). Отсюда следует **теорема** [13]: *если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны* (доказать самостоятельно).

Задача. Пусть через точки M и N требуется провести плоскости, параллельные данной плоскости Σ. Плоскость Σ задана треугольником ABC (рис. 2.36). Проведем через точку M две прямые a и b, параллельные сторонам AB и BC. Пересекающиеся прямые a и b определяют плоскость Σ', параллельную данной плоскости Σ.

Проведем в данной плоскости $\Sigma(ABC)$ горизонталь h и фронталь f. Плоскость Σ'', параллельная плоскости Σ, может быть задана горизонталью h'' и фронталью f'', параллельными горизонтали h и фронтали f плоскости Σ. Такая плоскость проведена через точку N (см. рис. 2.36). Плоскости $\Sigma(h \cap f)$, $\Sigma'(a \cap b)$ и $\Sigma''(h'' \cap f'')$ взаимно параллельны.

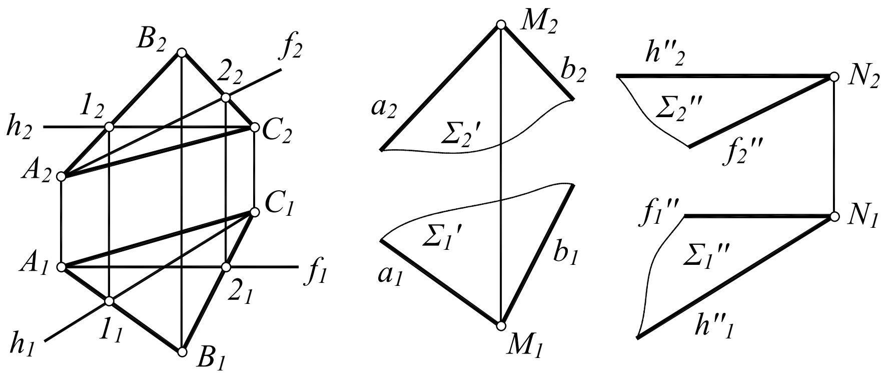


Рис. 2.36

Вопросы для повторения

1. Какую прямую называют прямой общего положения?
2. Какие прямые называют проецирующими прямыми, прямыми уровня?
3. Какие точки называют конкурирующими? Как расположены в пространстве горизонтально-конкурирующие точки? Как расположены в пространстве фронтально-конкурирующие точки?
4. Как определить истинную длину отрезка прямой общего положения, заданного двумя своими проекциями? Как определить истинную длину отрезка прямой частного положения (горизонтали, фронтали, проецирующей прямой)?
5. Как на прямой общего положения отложить отрезок заданной длины?
6. Как задать плоскость на ортогональном чертеже?
7. Какую плоскость называют плоскостью общего положения?
8. Какие плоскости называют плоскостями частного положения?
9. Какие линии называют главными линиями плоскости?
10. Назвать признаки принадлежности прямой и точки к плоскости.
11. Сформулировать признаки параллельности прямой и плоскости; признаки параллельности двух плоскостей.
12. Сколько плоскостей, параллельных данной прямой, можно провести через данную точку пространства?
13. Сколько прямых, параллельных данной плоскости, можно провести через данную точку пространства? Где располагаются все эти прямые?