# Лекция 15

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ЧЕТЫРЕХМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА

Начертательная геометрия – раздел математики, в котором изучается теория конструктивных методов отображения пространств различной размерности друг на друга. В конструктивном методе отображения исходное пространство и его модель “связаны” некоторой проекционной системой, включающей в себя проецирующие линии и поверхности. В этой главе рассмотрен простейший конструктивный способ отображения четырехмерного пространства $E^4$ на плоскость – обобщенный чертеж Монжа.

Многомерная геометрия возникла путем аналогии с геометрией на плоскости и с геометрией в трехмерном пространстве. На прямой линии точка задается одной координатой, на плоскости – двумя, в пространстве – тремя координатами. Для определения положения точки в четырехмерном пространстве надо указать четыре ее координаты.

На плоскости система координат имеет две оси, в пространстве – три. Как на плоскости, так и в пространстве каждая из осей координат может быть выбрана перпендикулярно другим осям. В четырехмерном пространстве система декартовых координат содержит четыре оси, причем любая пара этих осей перпендикулярна друг другу. Такое пространство существует лишь в воображении, так как реальное пространство трехмерно. Поэтому увидеть или смоделировать в буквальном, физическом смысле фигуры четырехмерного пространства никто не в состоянии. Увидеть эти фигуры и исследовать их свойства возможно только мысленно.

Человек, который впервые слышит о четырехмерном пространстве, готов возразить: “Но ведь не может быть четырех прямых, которые друг другу перпендикулярны!”. Действительно, в реальном трехмерном пространстве такая геометрическая конструкция невозможна. Но в виртуальном, воображаемом пространстве $E^4$ все четыре оси $x, y, z, t$ декартовой системы координат могут быть приняты взаимно перпендикулярными.

Нет ничего нелогичного или противоречивого в том, чтобы рассматривать четверки чисел как координаты точки, исследовать свойства этих “четырехмерных точек”, составлять из них фигуры, доказывать теоремы, постепенно формируя таким образом геометрию четырехмерного пространства.

### 15.1. Точка, прямая, плоскость, гиперплоскость пространства $E^4$

Чертеж для моделирования четырехмерного пространства состоит из трех полей проекций: $\Pi_1=Oxy$, $\Pi_2=Oxz$, $\Pi_3=Oxt$, где $x$, $y$, $z$, $t$ – оси ортогональной системы координат. Точка $A$ ортогонально проецируется на три плоскости проекций, затем вращением вокруг оси $Ox$ плоскости $\Pi_1$, $\Pi_2$, $\Pi_3$ совмещаются. При этом проекции $A_1$, $A_2$, $A_3$ данной точки располагаются на одной линии связи, перпендикулярной оси $Ox$ (рис. 15.1). Такой чертеж называют обобщенным чертежом Монжа.

Полученный чертеж является обратимым, так как на нем имеются четыре отрезка, определяющие координаты $x_A$, $y_A$, $z_A$, $t_A$ точки $A$ в пространстве $E^4$. Точку называют пространством нулевой размерности или *0-плоскостью*.

Прямая определяется двумя своими точками. Указав проекции двух произвольных точек $A$, $B$ и соединив одноименные проекции, получим чертеж прямой общего положения в пространстве $E^4$ (рис. 15.2). Прямая – одномерное пространство (*1-плоскость*).

Плоскость в пространстве $E^4$, точно так же, как и в $E^3$, задается тремя точками $A$, $B$, $C$ (рис. 15.3), или точкой и прямой, или двумя пересекающимися прямыми. Плоскость – двумерное пространство (*2-плоскость*). Это пространство заполнено принадлежащими ему точками и прямыми: точки $A$, $B$, $C$ плюс три прямые, соединяющие эти точки, плюс все точки на этих трех прямых, плюс все прямые, соединяющие любые две точки, взятые по одной на каждой из этих прямых.

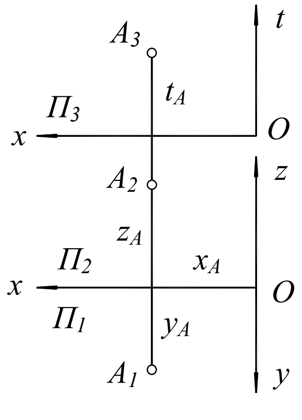



**Рис. 15.1**

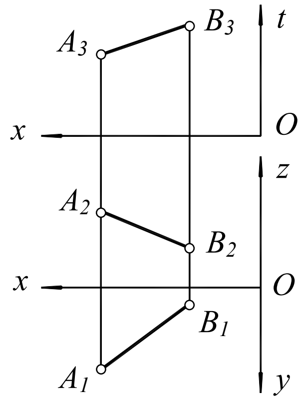



**Рис. 15.2**

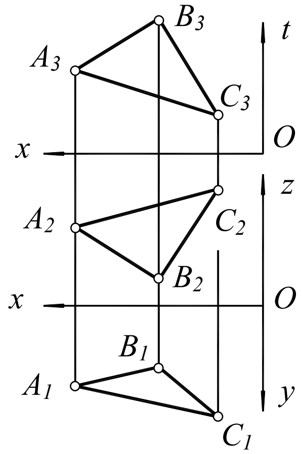



**Рис. 15.3**

**Определение.** *Точечное пространство такой структуры, когда оно вместе с любыми двумя своими точками содержит прямую, проходящую через них, называется линейным.*

Пространство нулевой размерности (точка) может быть “вложено” в линейное пространство размерности один (прямая). Другими словами, точка может принадлежать прямой. Говорят, что на прямой имеется $\infty^1$ точек, так как точка на прямой определяется одной своей координатой.

Пространство размерности один (прямая) может быть вложено в пространство размерности два (плоскость), то есть прямая может принадлежать плоскости. На плоскости имеется $\infty^2$ прямых, так как прямая на плоскости вполне определяется двумя отрезками, отсекаемыми ею на осях координат (двумя параметрами).

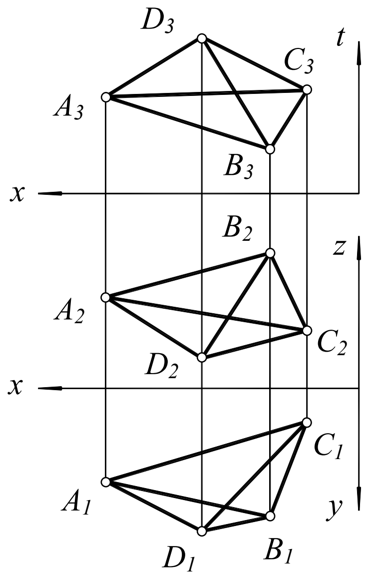



**Рис. 15.4**

Пространство размерности два (*2-плоскость*, то есть обычная плоскость) вложено в трехмерное пространство (*3-плоскость*). В трехмерном пространстве существует $\infty^3$ плоскостей, так как положение плоскости, принадлежащей трехмерному пространству, определяется тремя параметрами (например, тремя отрезками, отсекаемыми плоскостью на осях координат).

Трехмерное пространство (*3-плоскость*), вложенное в пространство $E^4$, вполне определяется четырьмя некомпланарными точками $ABCD$ (рис. 15.4), или точкой и плоскостью, или двумя скрещивающимися прямыми, или тремя проходящими через одну точку некомпланарными прямыми, или двумя пересекающимися по прямой плоскостями, или пересекающимися прямой и плоскостью.

Трехмерное пространство как часть четырехмерного пространства называют *гиперплоскостью*. Гиперплоскость – линейное подпространство, заполненное принадлежащими ему точками, прямыми и плоскостями. Это подпространство включает в себя точки $A$, $B$, $C$, $D$ плюс шесть прямых, соединяющих эти точки, плюс все прямые, соединяющие любую пару точек на этих прямых, плюс всевозможные плоскости, образованные этими точками и прямыми. В пространстве $E^4$ содержится множество $\infty^4$ гиперплоскостей, так как положение гиперплоскости в $E^4$ определяется четырьмя параметрами (например, четырьмя отрезками, отсекаемыми гиперплоскостью на осях координат). В четырехмерном пространстве наше привычное пространство $E^3$ становится лишь частью (подпространством) объемлющего пространства $E^4$.

### 15.2. Инцидентность элементов гиперплоскости пространства $E^4$

Гиперплоскость четырехмерного пространства содержит “вложенные” в нее линейные элементы: точки, прямые и плоскости. Взаимопринадлежность (инцидентность) этих элементов определяется следующим признаком: *точка инцидентна гиперплоскости, если она принадлежит какой-либо прямой или плоскости, вложенной в данную гиперплоскость.*

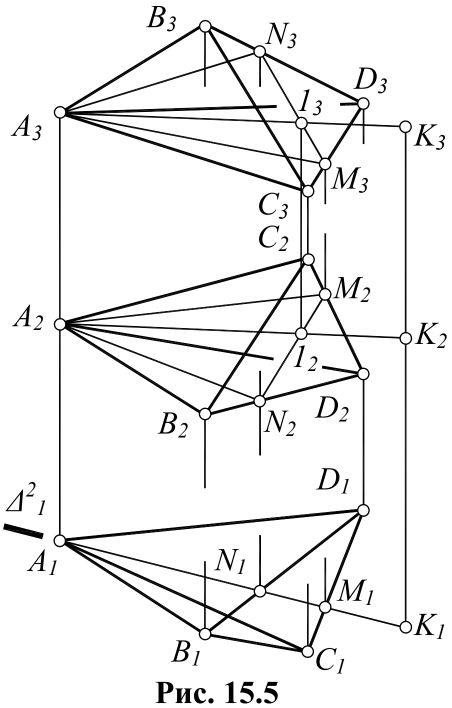



**Рис. 15.5**

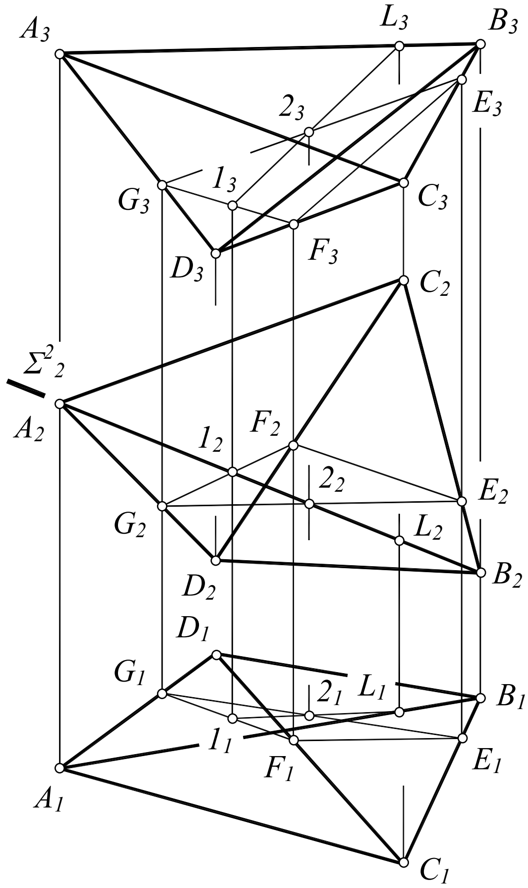



**Рис. 15.6**

Пусть гиперплоскость $\Sigma^3$ задана четырьмя точками $A$, $B$, $C$, $D$ (здесь и далее надстрочный индекс обозначает размерность подпространства). Требуется построить какую-либо точку, инцидентную данной гиперплоскости. Покажем, что можно совершенно произвольно указать две проекции искомой точки, после чего найти ее третью проекцию из условия принадлежности гиперплоскости (рис. 15.5).

Произвольно отмечаем на чертеже две проекции $K_1$, $K_2$ некоторой точки $K$ четырехмерного пространства и “объявляем” ее принадлежащей гиперплоскости $\Sigma^3$. В гиперплоскости $\Sigma^3$ выделим плоскость $\Delta^2=AMN$, проходящую через точку $K$. В плоскости $\Delta^2$ проводим прямую $AK$, которая в точке $1$ пересекается с $MN$.

Задача решена, так как точка $K$ принадлежит гиперплоскости $\Sigma^3$. Действительно, точка $K$ инцидентна прямой $A$-$1$, вложенной в плоскость $\Delta^2$, которая, в свою очередь, вложена в $\Sigma^3$. Недостающая проекция $K_3$ точки $K$ определяется на чертеже посредством линий связи (из условия принадлежности точки $K$ данной гиперплоскости).

Подобным образом задача на принадлежность точки плоскости решается в обычном пространстве $E^3$: для построения точки, принадлежащей плоскости, указывают одну проекцию искомой точки. Вторая проекция определяется из условия принадлежности точки данной плоскости.

**Правило.** *Для построения точки, принадлежащей гиперплоскости, достаточно указать две ее проекции. Третья проекция определяется из условия принадлежности точки данной гиперплоскости.*

В качестве примера рассмотрим следующую задачу. Пусть требуется построить точку $L$ пересечения прямой $l=AB$ и плоскости $\Delta^2=EFG$, вложенной в гиперплоскость $ABCD$ (рис. 15.6). Оба линейных элемента (прямая $l$ и плоскость $\Delta^2$) принадлежат одной и той же гиперплоскости $ABCD$, поэтому достаточно найти две проекции искомой точки. Для этого может быть использована любая пара проекций обобщенного чертежа. Рассматривая проекции $\Pi_1$ и $\Pi_2$ как чертеж тетраэдра $ABCD$, находим точку пересечения ребра тетраэдра $l=AB$ и плоскости $\Delta^2$: проводим через $l$ вспомогательную плоскость $\Sigma^2$, находим линию $1\text{-}2$ пересечения плоскостей $\Delta^2$ и $\Sigma^2$ и отмечаем искомую точку $L=l\cap(1\text{-}2)$. Третья проекция $L_3$ точки $L$ определяется по линии связи.

## 15.3. Пересечение подпространств четырехмерного пространства

В $E^4$ существуют линейные подпространства: точки, прямые, плоскости и гиперплоскости. Эти подпространства либо “вложены” друг в друга, либо пересекаются (инцидентны), либо вовсе не имеют общих элементов (скрещиваются).

### *15.3.1. Пересечение прямой с плоскостью*

*Произвольная прямая и плоскость общего положения в четырехмерном пространстве не пересекаются* (подобно тому, как в обычном пространстве не пересекаются две прямые общего положения). Действительно, допустим, что некоторая плоскость $\Gamma^2$ и прямая $l$ пересеклись в точке $L$. Отметим на плоскости $\Gamma^2$ тройку произвольных точек $A$, $B$, $C$, а на прямой $l$ – произвольную точку $D$. Четыре точки $A$, $B$, $C$, $D$ определяют в $E^4$ некоторую гиперплоскость $\Sigma^3$. Очевидно, плоскость $\Gamma^2$ и прямая $l$ “вложены” в эту гиперплоскость, так как прямая $l$ имеет две точки $D$, $L$, а плоскость $\Gamma^2$ – три точки $A$, $B$, $C$, инцидентные $\Sigma^3$. Но в таком случае прямая $l$ и плоскость $\Gamma^2$ занимают в $E^4$ не произвольное “общее” положение, а частное: они принадлежат одной и той же гиперплоскости $\Sigma^3$.

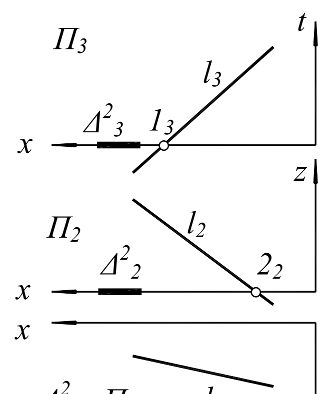


**Рис. 15.7**

Попытаемся построить точку пересечения произвольной прямой $l$ с плоскостью общего положения $\Delta^2$. Предварительно мысленно передвинем и повернем систему координат $Oxyzt$ до совмещения плоскости проекций $\Pi_1=Oxy$ с плоскостью $\Delta^2$ (рис. 15.7). Если существует точка пересечения прямой $l$ и плоскости $\Delta^2=\Pi_1$, то она должна иметь по осям $t$ и $z$ координаты, равные нулю (так как оси $t$ и $z$ перпендикулярны плоскости $\Pi_1$). На прямой $l$ есть точка $1$ с координатой $t=0$ и точка $2$ с координатой $z=0$, но нет точки, в которой *обе* координаты $t$ и $z$ равны нулю. Поэтому прямая $l$ не имеет общей точки с плоскостью $\Delta^2$.

### *15.3.2. Пересечение двух плоскостей*

*Две плоскости общего положения в четырехмерном пространстве* (не “вложенные” в одну гиперплоскость) *пересекаются только в одной точке*. Действительно, предположим, что две плоскости $\Sigma^2$ и $\Delta^2$ в пространстве $E^4$ пересеклись по прямой. Отметим на этой прямой две произвольные точки $A$, $B$. На плоскости $\Sigma^2$ отметим произвольную точку $C$, на плоскости $\Delta^2$ отмечаем точку $D$. Точки $A$, $B$, $C$, $D$ определяют в $R^4$ гиперплоскость, которой принадлежит как плоскость $\Sigma^2=ABC$, так и плоскость $\Delta^2=ABD$. Следовательно, если две плоскости в $E^4$ пересекаются по прямой, то они “вложены” в одну гиперплоскость, то есть занимают не общее, а частное положение.

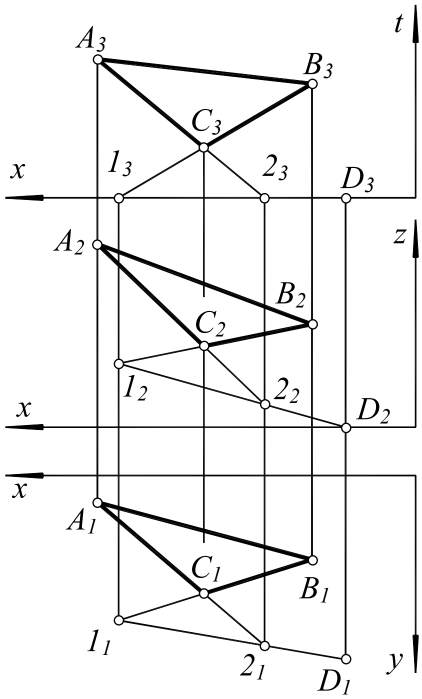


**Рис. 15.8**

Пусть в пространстве $E^4$ даны две произвольные плоскости. Совместим одну из них с плоскостью проекций $\Pi_1=Oxy$, а другую плоскость зададим тремя произвольными точками $A$, $B$, $C$ (рис. 15.8). Построим общий элемент плоскостей $\Pi_1$ и $ABC$. Искомый элемент находится в $\Pi_1$, поэтому он должен иметь по оси $t$ координату, равную нулю (так как ось $t$ перпендикулярна плоскости $\Pi_1$). Этому условию удовлетворяют все точки прямой *1-2* (см. рис. 15.8). Но по оси $z$ искомый общий элемент плоскостей $\Pi_1$ и $ABC$ также должен иметь координату, равную нулю (потому что ось $z$, как и ось $t$, перпендикулярна $\Pi_1$). Условию $z=0$ удовлетворяет единственная точка $D$ на прямой *1-2*, которая и является общим элементом данных плоскостей в пространстве $E^4$. Таким образом, *плоскости общего положения в четырехмерном пространстве пересекаются только в одной точке.*

### *15.3.3. Пересечение прямой и гиперплоскости*

*Произвольная прямая и гиперплоскость общего положения в четырехмерном пространстве пересекаются в одной точке.* Рассмотрим эту задачу на обобщенном чертеже Монжа. Пусть на чертеже каким-либо способом (четырьмя некомпланарными точками, двумя скрещивающимися прямыми, тремя пересекающимися прямыми или др.) задана гиперплоскость $\Sigma^3$. Требуется найти точку пересечения этой гиперплоскости с произвольной прямой $l$.

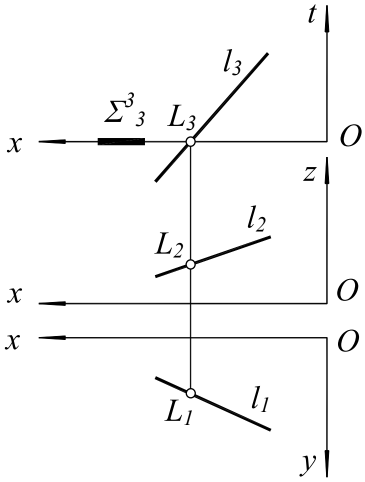


**Рис. 15.9**

В гиперплоскости $\Sigma^3$ можно построить произвольную тройку взаимно перпендикулярных прямых $x'$, $y'$, $z'$. Для этого надо отметить в $\Sigma^3$ произвольную плоскость, начертить в ней две произвольные взаимно перпендикулярные прямые $x'$, $y'$ и через точку их пересечения провести перпендикуляр $z'$ к плоскости $x'y'$. Мысленно выполнив такое построение, переместим систему координат $x$, $y$, $z$, $t$ таким образом, чтобы оси $x$, $y$, $z$ совместились с прямыми $x'$, $y'$, $z'$. В результате гиперплоскость $\Sigma^3$ совпадет с “координатной гиперплоскостью” $Oxyz$.

Проекция гиперплоскости $\Sigma^3$ на плоскость $\Pi_3$=*Oxt* вырождается в прямую, совпадающую с осью *x* (так как координаты по оси *t* всех точек этой гиперплоскости равны нулю), а ее невырожденными проекциями на $\Pi_1$ и $\Pi_2$ будут точечные поля $\Pi_1$=*Oxy* и $\Pi_2$=*Oxz* (рис. 15.9). Прямая *l* занимает общее положение в четырехмерном пространстве и пересекается с трехмерным подпространством $\Sigma^3$ в точке *L*. Действительно, координата точки *L* по оси *t* равна нулю, то есть *L* принадлежит гиперплоскости $\Sigma^3$=*Oxyz*. С другой стороны, точка *L* принадлежит прямой *l*, поэтому *L* – искомая общая точка прямой *l* и гиперплоскости $\Sigma^3$.

### *15.3.4. Пересечение плоскости и гиперплоскости*

Покажем, что *произвольная плоскость* $\Delta^2$ *и гиперплоскость* $\Sigma^3$ *пространства* $E^4$ *пересекаются по прямой*. Как в предыдущем примере, мысленно заменим систему коор-

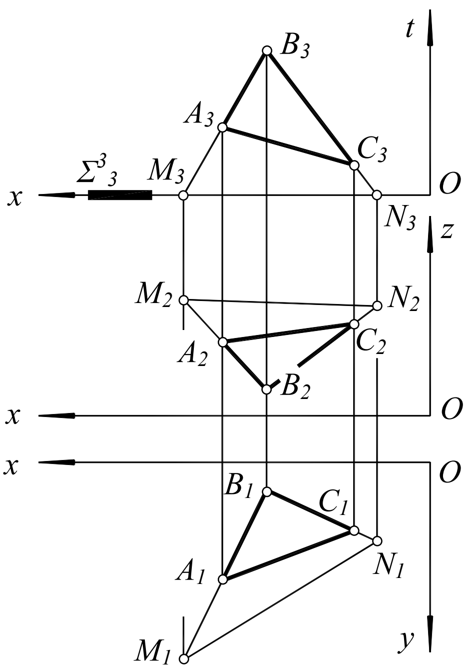



**Рис. 15.10**

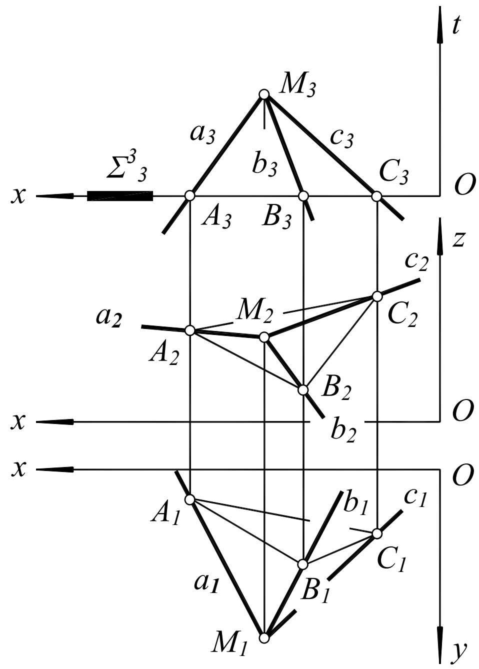



**Рис. 15.11**

динат таким образом, чтобы данная гиперплоскость $\Sigma^3$ совместилась с координатной гиперплоскостью *Oxyz*. При этом проекция гиперплоскости $\Sigma^3$ на плоскость $\Pi_3$=*Oxt* вырождается в прямую, совпадающую с осью *Ox*, а плоскость $\Delta^2$, заданная точками *A*, *B*, *C*, занимает некоторое общее положение (рис. 15.10). Стороны *AB* и *BC* треугольника *ABC* пересекаются с гиперплоскостью $\Sigma^3$ в точках *M* и *N*, а вся прямая *MN* принадлежит как пространству $\Sigma^3$, так и плоскости $\Delta^2$. Следовательно, прямая *MN* – линия пересечения плоскости $\Delta^2$ и гиперплоскости $\Sigma^3$.

### *15.3.5. Пересечение двух гиперплоскостей*

*Две гиперплоскости* $\Sigma^3$ *и* $\Theta^3$ *четырехмерного пространства пересекаются по обычной 2-плоскости*. Как в предыдущих примерах, мысленно заменим систему координат таким образом, чтобы гиперплоскость $\Sigma^3$ совместилась с координатной гиперплоскостью *Oxyz*. Другая гиперплоскость $\Theta^3(a \cap b \cap c)$, заданная на чертеже тремя пересекающимися в точке *M* прямыми *a*, *b*, *c*, будет занимать произвольное общее положение (рис. 15.11). Все точки пространства $E^4$, координата которых по оси *t* равна нулю, принадлежат гиперплоскости *Oxyz*. Поэтому общим элементом гиперплоскостей $\Sigma^3(Oxyz)$ и $\Theta^3$ является множество точек гиперплоскости $\Theta^3$, координата которых по оси $t$ равна нулю. Этому условию удовлетворяют все точки и прямые плоскости *ABC*, где *A*, *B*, *C* – точки пересечения прямых *a*, *b*, *c* и гиперплоскости *Oxyz*. Следовательно, *ABC* есть плоскость пересечения двух гиперплоскостей.

### *15.3.6. Размерность пространства пересечения*

Отметим определенную закономерность, возникающую при пересечении подпространств различной размерности в объемлющем трех или четырехмерном пространстве. Так, например, плоскость (пространство размерности *2*) и прямая (пространство размерности *1*) пересекаются в обычном трехмерном пространстве в одной точке (пространство нулевой размерности).

Можно предположить, что размерность пространства пересечения равна сумме размерностей пересекающихся подпространств (в нашем примере: *два* плюс *один*) минус размерность объемлющего пространства (*три*). Для рассмотренного примера получаем *ноль* (размерность точки), что соответствует действительности. Проверим свое предположение, подсчитав, например, размерность пространства пересечения двух гиперплоскостей четырехмерного пространства: *три* плюс *три* (размерности пересекающихся подпространств) минус *четыре* (размерность объемлющего пространства) – получаем *два* (размерность плоскости), что соответствует модели четырехмерного пространства.

Продолжая "экспериментальную проверку", убеждаемся, что во всех случаях пересечения двух подпространств выполняется соотношение

$$r = p_1 + p_2 - n,$$

где $r$ – размерность пространства пересечения двух подпространств размерности $p_1$ и $p_2$, вложенных в объемлющее пространство размерности $n$. Если полученное значение $r$ меньше нуля, то данные подпространства не пересекаются. Например, для плоскости и прямой в пространстве $R^4$ получаем размерность их общего пространства $r=-1$, что означает отсутствие пересечения (обычная плоскость и прямая общего положения в четырехмерном пространстве не пересекаются).

## 15.4. Перпендикулярность в четырехмерном пространстве

В обычном трехмерном пространстве для построения точки пересечения прямой и плоскости или линии пересечения двух плоскостей используется вспомогательный "геометрический инструмент" – проецирующая плоскость, то есть плоскость, перпендикулярная какой-либо плоскости проекций. Проекция такой плоскости вырождается в прямую линию.

При переходе в четырехмерное пространство основным вспомогательным инструментом становится "*проецирующая гиперплоскость*", то есть трехмерное подпространство, перпендикулярное какой-либо плоскости проекций. Проекция всего трехмерного подпространства на эту плоскость проекций вырождается в прямую линию.

Может показаться странным, что бесконечная по количеству элементов и ничем не ограниченная в пространстве гиперплоскость (трехмерное множество) не заполняет собой все предоставленное ему пространство (пусть даже и четырехмерное). Кажется еще более странным, что изображение трехмерного пространства может выглядеть прямой линией.

Тем не менее, нас не удивляет, что двумерное пространство (обычная плоскость) не заполняет собой все трехмерное пространство, хотя плоскость ничем не ограничена и содержит бесконечное множество точек и прямых. Если в обычном пространстве каким-либо образом задать плоскость, то, очевидно, в пространстве найдутся точки и прямые, не принадлежащие этой плоскости. Точно так же в четырехмерном пространстве можно указать точки, прямые и плоскости, не принадлежащие данной гиперплоскости.

Также не вызывает затруднений тот факт, что в обычном трехмерном пространстве изображение двумерного пространства (плоскости) может вырождаться в прямую линию. Труднее представить, что изображение гиперплоскости пространства $E^4$ также может выродиться на чертеже в прямую линию. При каких условиях это происходит?

Чтобы ответить на поставленный вопрос, рассмотрим условия перпендикулярности прямой, плоскости и гиперплоскости к какой-либо плоскости проекций в четырехмерном пространстве. Для определенности будем рассматривать условия перпендикулярности к плоскости $\Pi_1=Oxy$.

### *15.4.1. Перпендикуляр, восставленный к плоскости проекций*

В пространстве $E^4$ из любой точки плоскости $\Pi_1=Oxy$ можно восставить к $\Pi_1$ не один, а множество перпендикуляров. Например, через точку $O$ (начало координат) проходит множество прямых $m_i$, лежащих в плоскости $\Pi_4=Ozt$. Покажем, что все прямые этого множества перпендикулярны плоскости $\Pi_1=Oxy$.

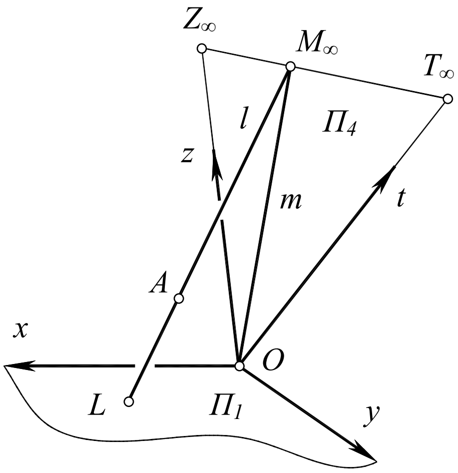



**Рис. 15.12**

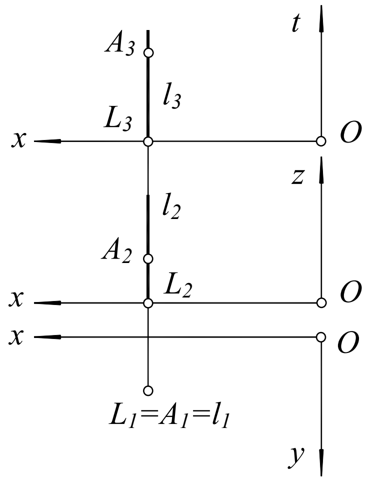



**Рис. 15.13**

Возьмем в координатной плоскости $\Pi_4=Ozt$ произвольную прямую $m$, проходящую через точку $O$ (рис. 15.12). Как у любой точки плоскости $Ozt$, координаты $x, y$ всех точек этой прямой равны нулю (то есть равны координатам $x_O=0, y_O=0$ точки $O$, в которой пересекаются взаимно перпендикулярные плоскости $\Pi_1$ и $\Pi_4$). Постоянство координат $x, y$ всех точек прямой означает, что эта прямая (как и любая другая прямая $m_i$ плоскости $\Pi_4=Ozt$, проходящая через точку $O$) перпендикулярна плоскости $\Pi_1$.

Рассмотрим произвольную точку $L$ плоскости $\Pi_1$ и покажем, что через нее также проходит множество перпендикуляров к $\Pi_1$. Через точку $L$ проведем прямую $l$, параллельную прямой $m$ (см. рис. 15.12). Прямая $l$ может быть получена параллельным переносом прямой $m$ из точки $O$ в точку $L$. Прямая $l$, как и прямая $m$, перпендикулярна плоскости $\Pi_1$. При этом параллельные прямые $l$ и $m$ пересекаются в несобственной точке $M_\infty$, инцидентной несобственной прямой $Z_\infty T_\infty$. И вообще, любая прямая, соединяющая произвольную точку плоскости $\Pi_1$ с произвольной точкой несобственной прямой $Z_\infty T_\infty$, параллельна какой-либо прямой $m_i$, а следовательно, перпендикулярна плоскости $\Pi_1=Oxy$.

**Вывод.** *Все прямые пространства* $E^4(Oxyzt)$*, проходящие через данную точку* $L$ *плоскости* $\Pi_1=Oxy$ *и пересекающие несобственную прямую* $Z_\infty T_\infty$ *координатной плоскости* $\Pi_4=Ozt$*, перпендикулярны к плоскости* $\Pi_1$ *в данной точке* $L$. Иными словами, любая прямая, проведенная из какой-либо точки плоскости $\Pi_1$ параллельно перпендикулярной к $\Pi_1$ координатной плоскости $\Pi_4=Ozt$, перпендикулярна к $\Pi_1$.

Таким образом, в пространстве $E^4$ из любой точки координатной плоскости $\Pi_1=Oxy$ можно провести пучок (однопараметрическое множество) прямых, перпендикулярных к $\Pi_1$. Этот пучок прямых перспективен ряду точек несобственной прямой $Z_\infty T_\infty$.

Чтобы смоделировать на чертеже перпендикуляр $l$, восставленный к плоскости $\Pi_1$ из точки $L$ этой плоскости, достаточно провести через $L$ прямую $l$ параллельно координатной плоскости $\Pi_4=Ozt$ (рис. 15.13).

Так как вся координатная плоскость $\Pi_4=Ozt$ ортогонально проецируется на $\Pi_1$ в точку (в начало координат $O$), то любая параллельная плоскости $\Pi_4$ прямая $l=LA$ также проецируется на $\Pi_1$ в точку. На рис. 15.12 и рис. 15.13 точка $A$ на прямой $l$ указана для “выделения” этой прямой из однопараметрического множества перпендикуляров к $\Pi_1$, проходящих через точку $L$.

### *15.4.2. Плоскость, вполне перпендикулярная плоскости проекций*

В пространстве $E^4$ все перпендикуляры, восставленные к плоскости $\Pi_1=Oxy$ из произвольной точки $L$ этой плоскости, пересекают несобственную прямую $Z_\infty T_\infty$ координатной плоскости $\Pi_4=Ozt$. Точка $L$ плоскости $\Pi_1$ и несобственная прямая $Z_\infty T_\infty$ задают в четырехмерном пространстве некоторую плоскость $\Delta^2$, “наполненную” перпендикулярами $l_i$ к $\Pi_1$, проходящими через точку $L$ (рис. 15.14).

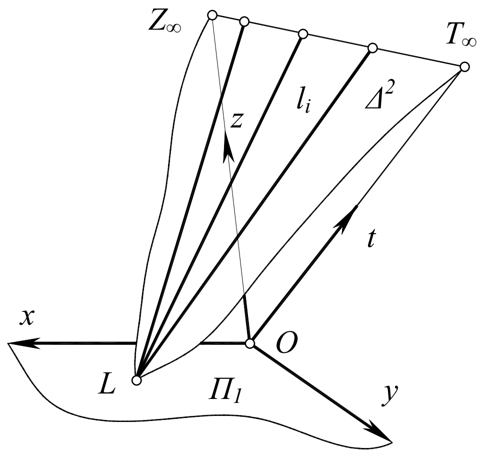



**Рис. 15.14**

Все точки плоскости $\Delta^2$ имеют по осям $Ox$, $Oy$ одинаковые координаты, равные координатам $x_L$, $y_L$ точки $L$, поэтому вся плоскость $\Delta^2$ ортогонально проецируется на плоскость $\Pi_1=Oxy$ в одну и ту же точку (в точку $L$). Такую плоскость называют “*проецирующей*” или “*вполне перпендикулярной*” к плоскости $\Pi_1$. Плоскости $\Pi_1$ и $\Delta^2$ пересекаются в точке $L$ (см. рис. 15.14). Точка $L$ – единственная общая точка этих плоскостей. Любая проходящая через $L$ прямая плоскости $\Pi_1$ перпендикулярна всем проходящим через $L$ прямым плоскости $\Delta^2$.

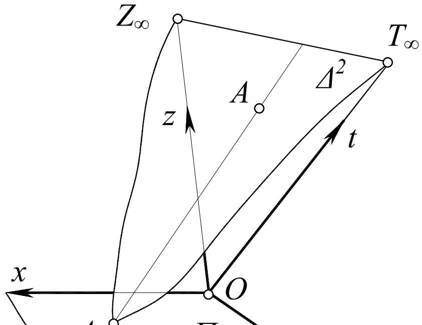



**Рис. 15.15**

**Определение.** *Две плоскости четырехмерного пространства называют вполне перпендикулярными, если они пересекаются в точке, причем каждая прямая одной плоскости, проходящая через их общую точку, перпендикулярна всем прямым другой плоскости, проходящим через эту же точку.*

Через каждую точку $L$ плоскости $\Pi_1$ проходит единственная проецирующая плоскость $\Delta^2(LZ_\infty T_\infty)$, поэтому размерность множества проецирующих плоскостей совпадает с размерностью множества точек плоскости (оба множества двупараметричны). Говорят, что между множеством точек плоскости $\Pi_1$ и множеством проецирующих плоскостей $\Delta^2$ установлено взаимно-однозначное соответствие.

Все плоскости, вполне перпендикулярные к $П_1$, проходят через несобственную прямую $Z_\infty T_\infty$, то есть параллельны плоскости $П_4 = Ozt$. И наоборот, любая плоскость, проходящая через несобственную прямую $Z_\infty T_\infty$ (то есть плоскость, параллельная плоскости $П_4$), вполне перпендикулярна плоскости $П_1$.

Через произвольно указанную точку $A(x_A, y_A, z_A, t_A)$ пространства $E^4$ проходит единственная проецирующая плоскость $\Delta^2(AZ_\infty T_\infty)$, которая пересекается с плоскостью $П_1$ в некоторой точке $A_1(x_A, y_A, 0, 0)$ (рис. 15.15). Все точки пространства $E^4$ с координатами $x_A$, $y_A$ и произвольными координатами $z$, $t$ принадлежат плоскости $\Delta^2$.

### *15.4.3. Перпендикуляр, опущенный на плоскость проекций из произвольной точки пространства $E^4$*

Чтобы из точки $A$ четырехмерного пространства опустить перпендикуляр $d$ на плоскость $П_1$, предварительно проведем через $A$ проецирующую плоскость $\Delta^2$. Плоскость $\Delta^2$, определенная несобственной прямой $Z_\infty T_\infty$ и точкой $A$, пересекается с $П_1$ в некоторой точке $D$. Прямая $d$, соединяющая точки $A$ и $D$, пересекается с несобственной прямой $Z_\infty T_\infty$ в точке $A_\infty$ (рис. 15.16). Согласно данному в п. 15.3.1 признаку перпендикулярности, прямая $d=A_\infty AD$ есть искомый перпендикуляр, опущенный из точки $A$ на плоскость $П_1$.

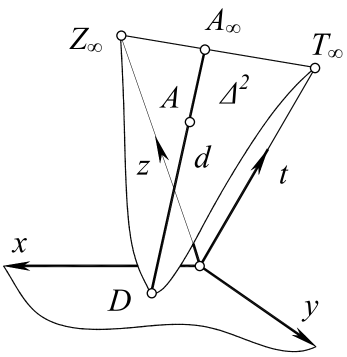



**Рис. 15.16**

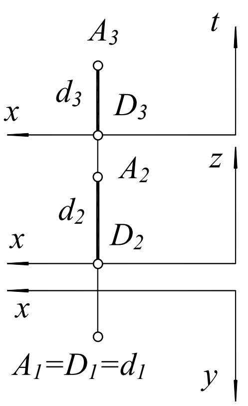



**Рис. 15.17**

Таким образом, через любую точку $A$ пространства $E^4$ проходит единственный перпендикуляр к плоскости проекций $П_1$. Чертеж перпендикуляра $d=AD$, опущенного из точки $A$ на плоскость $П_1$, показан на рис. 15.17.

Если точка $A$ находится на плоскости $П_1$, то точки $A$ и $D$ совпадают, и положение перпендикуляра $d=AD$ становится неопределенным. В этом случае любая прямая, соединяющая точку $A$ с произвольной точкой на несобственной прямой $Z_\infty T_\infty$, перпендикулярна плоскости $П_1$ (см. п. 15.4.1).

### *15.4.4. Гиперплоскость, перпендикулярная к плоскости проекций*

Рассмотрим гиперплоскость $\Sigma^3$, заданную двумя скрещивающимися прямыми: несобственной прямой $Z_\infty T_\infty$ и какой-либо прямой $m$, лежащей в плоскости $П_1$. Гиперплоскость $\Sigma^3$ параллельна координатной плоскости $П_4=Ozt$ (так как проходит через несобственную прямую плоскости $П_4$) и пересекает координатную плоскость $П_1$ по данной прямой $m$.

Через точку $A$ гиперплоскости $\Sigma^3$ проходит единственная прямая $a$, пересекающая прямые $m$ и $Z_\infty T_\infty$ (так как через всякую точку трехмерного пространства можно провести единственную прямую, пересекающую две данные скрещивающиеся прямые). Точки, в которых прямая $a$ пересекается с прямыми $Z_\infty T_\infty$ и $m$, обозначим $A_\infty$ и $A_1$. Прямая $a=A_\infty AA_1$ принадлежит гиперплоскости $\Sigma^3$ и перпендикулярна плоскости $П_1$ (рис. 15.18).

**Вывод.** *Через произвольную точку $A$ гиперплоскости $\Sigma^3(m, Z_\infty T_\infty)$ можно провести единственный перпендикуляр $a$ к плоскости $П_1$. Этот перпендикуляр принадлежит $\Sigma^3$ и пересекается с $П_1$ в некоторой точке $A_1$, инцидентной линии $m$ пересечения гиперплоскости $\Sigma^3$ с плоскостью $П_1$.*

Таким образом, гиперплоскость $\Sigma^3$, проходящая через несобственную прямую $Z_\infty T_\infty$, “наполнена” перпендикулярами к $\Pi_1$, посредством которых все точки гиперплоскости проецируются на $\Pi_1$ в линию ее пересечения с плоскостью $\Pi_1$. Такую гиперплоскость называют *проецирующей гиперплоскостью* (по аналогии с проецирующей плоскостью обычного трехмерного пространства, которая также “наполнена” перпендикулярами к $\Pi_1$ и также проецируется в прямую линию).

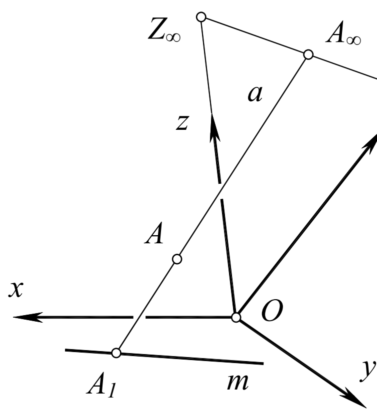



**Рис. 15.18**

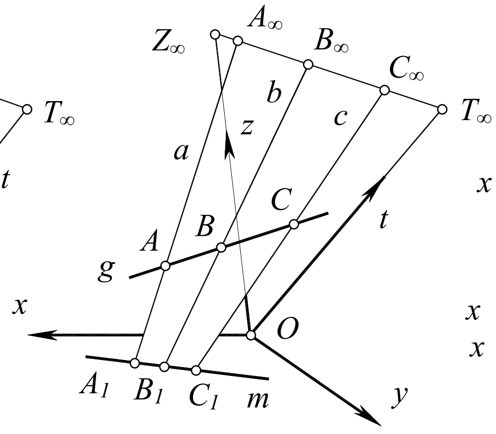



**Рис. 15.19**

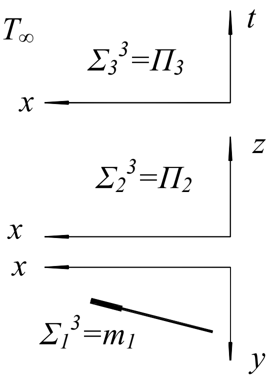



**Рис. 15.20**

Перпендикуляры к $\Pi_1$, заполняющие проецирующую гиперплоскость $\Sigma^3$, не параллельны между собой (у них нет общей несобственной точки), но параллельны координатной плоскости $\Pi_4$=*Ozt* (так как пересекаются с несобственной прямой $Z_\infty T_\infty$ плоскости $\Pi_4$). Например, рассмотрим множество перпендикуляров к плоскости $\Pi_1$, пересекающих какую-либо прямую *g*, лежащую в $\Sigma^3(m,\ Z_\infty T_\infty)$. Любой перпендикуляр *a*, *b*, *c*… из этого множества пересекается с тремя лежащими в $\Sigma^3$ прямыми (*g*, *m*, $Z_\infty T_\infty$), из которых одна несобственная (рис. 15.19). Следовательно, все перпендикуляры к $\Pi_1$, пересекающие прямую *g*, образуют линейчатый параболоид с плоскостью параллелизма $\Pi_4$. Его можно назвать *проецирующим параболоидом* (образующие параболоида перпендикулярны к $\Pi_1$ и ортогонально проецируют точки *A*, *B*, *C*… прямой *g* на плоскость $\Pi_1$).

Чтобы задать на чертеже произвольную проецирующую (перпендикулярную к $\Pi_1$) гиперплоскость $\Sigma^3$, достаточно указать ее вырожденную проекцию $\Sigma_1^3=m_1$. Невырожденными проекциями гиперплоскости $\Sigma^3$ будут все поля проекций $\Pi_2$=*Oxz* и $\Pi_3$=*Oxt* (рис. 15.20).

### *15.4.5. Сопряженные элементы четырехмерного пространства*

В начертательной геометрии трехмерное евклидово пространство дополняется “несобственной плоскостью”, которая определена тремя несобственными точками $X_\infty$, $Y_\infty$, $Z_\infty$ координатных осей *Ox*, *Oy*, *Oz* и содержит все несобственные элементы (точки и прямые) пространства. В свою очередь, четырехмерное пространство дополняется “несобственной гиперплоскостью”, положение которой определяется четырьмя несобственными точками $X_\infty$, $Y_\infty$, $Z_\infty$, $T_\infty$ взаимно перпендикулярных координатных осей *Ox*, *Oy*, *Oz*, *Ot*. Несобственная гиперплоскость содержит все несобственные точки, прямые и плоскости пространства $E^4$.

Если какая-либо плоскость пространства $E^4$ проходит через несобственную прямую $Z_\infty T_\infty$ плоскости $\Pi_4$=*Ozt*, то она перпендикулярна плоскости проекций $\Pi_1$=*Oxy*. В силу симметрии плоскостей $\Pi_1$=*Oxy* и $\Pi_4$=*Ozt* справедливо и обратное: если какая-либо плоскость проходит через несобственную прямую $X_\infty Y_\infty$ плоскости $\Pi_1$, то она перпендикулярна плоскости $\Pi_4$.

**Определение.** *Несобственные прямые вполне перпендикулярных координатных плоскостей называют сопряженными прямыми.*

Те из координатных плоскостей, которые не содержат одноименных осей координат, вполне перпендикулярны. Через начало координат проходят три пары вполне перпендикулярных координатных плоскостей: $\Pi_1=Oxy$ и $\Pi_4=Ozt$, $\Pi_2=Oxz$ и $\Pi_5=Oyt$, $\Pi_3=Oxt$ и $\Pi_6=Oyz$. Несобственные прямые этих плоскостей пересекаются в несобственных точках $X_\infty$, $Y_\infty$, $Z_\infty$, $T_\infty$ координатных осей пространства $E^4$. Эти точки являются вершинами тетраэдра, скрещивающиеся ребра которого $X_\infty Y_\infty$ и $Z_\infty T_\infty$, $X_\infty Z_\infty$ и $Y_\infty T_\infty$, $X_\infty T_\infty$ и $Y_\infty Z_\infty$ называют *взаимно сопряженными* (рис. 15.21). Отметим также, что всякая вершина тетраэдра $X_\infty Y_\infty Z_\infty T_\infty$ *сопряжена* с его противоположной гранью.

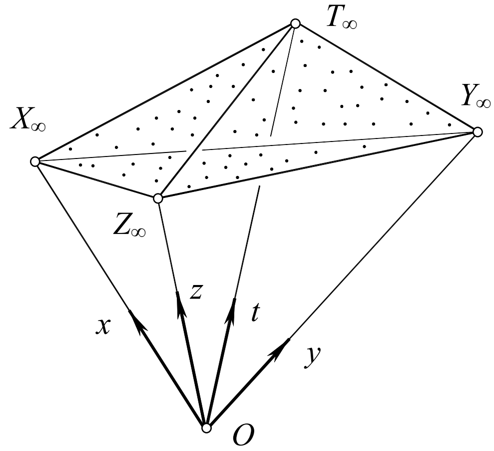



**Рис. 15.21**

Понятие “сопряженность” связано с понятием “перпендикулярность”. Например, сопряженность вершины $T_\infty$ с противоположной гранью $X_\infty Y_\infty Z_\infty$ означает, что координатная ось $Ot$ перпендикулярна координатной гиперплоскости $Oxyz$. Взаимная сопряженность скрещивающихся ребер $X_\infty Z_\infty$ и $Y_\infty T_\infty$ означает, что плоскость или гиперплоскость, проходящие через $Y_\infty T_\infty$, перпендикулярны координатной плоскости $\Pi_2=Oxz$.

Рассмотренные условия перпендикулярности к плоскости проекций $\Pi_1=Oxy$ могут быть обобщены следующим образом.

1. *Прямая перпендикулярна плоскости проекций $\Pi_i$, если она пересекает как эту плоскость проекций, так и несобственную прямую, сопряженную с несобственной прямой плоскости $\Pi_i$.*

2. *Какая-либо 2-плоскость пространства $E^4$ вполне перпендикулярна плоскости проекций $\Pi_i$, если она проходит через несобственную прямую, сопряженную с несобственной прямой плоскости $\Pi_i$.*

3. *Какая-либо гиперплоскость пространства $E^4$ перпендикулярна плоскости проекций $\Pi_i$, если она проходит через несобственную прямую, сопряженную с несобственной прямой плоскости $\Pi_i$.*

### 15.5. Позиционные задачи в четырехмерном пространстве

Позиционными называют задачи на построение общих элементов геометрических множеств (прямых, плоскостей, поверхностей). Для решения таких задач обычно используется способ “*понижения размерности*”, который в начертательной геометрии называют способом вспомогательных поверхностей.

Например, при построении линии пересечения двух поверхностей в обычном трехмерном пространстве все пространство $E^3$ “расслаивают” секущими поверхностями (плоскостями, сферами или какими-либо другими поверхностями) на множество двумерных слоев. Затем в каждом слое определяют общие элементы заданных поверхностей. Тем самым трехмерная задача сводится к решению множества двумерных задач.

Заметим, что способ расслоения пространства на подпространства меньшей размерности используется не только в начертательной геометрии. Это универсальный математический прием. Например, для определения объема, ограниченного какой-либо функцией $z=f(x, y)$, надо, как известно, “взять двойной интеграл”. Операция интегрирования в данном случае физически трактуется как расслоение пространства на плоские слои “бесконечно малой толщины” с последующим суммированием элементарных объемов этих слоев.

Мы уже рассматривали позиционные задачи в четырехмерном пространстве, но только для случая, когда одно из пересекающихся подпространств занимает особое (частное) положение относительно декартовой системы координат *Oxyzt* (см. п. 15.3). Составим алгоритмы решения этих задач для общего случая, когда пересекающиеся подпространства занимают произвольное (общее) положение.

### *15.5.1. Прямая и плоскость*

Покажем, что произвольная прямая $l$ и плоскость общего положения $\Delta^2(ABC)$ в пространстве $E^4$ не пересекаются (рис. 15.22). Заключив прямую $l$ во вспомогательную

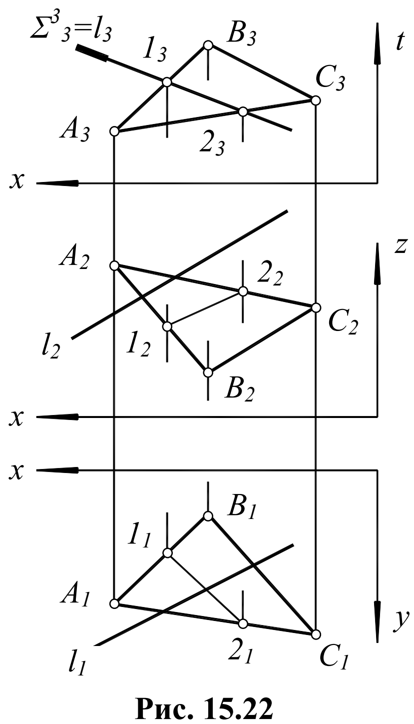



**Рис. 15.22**

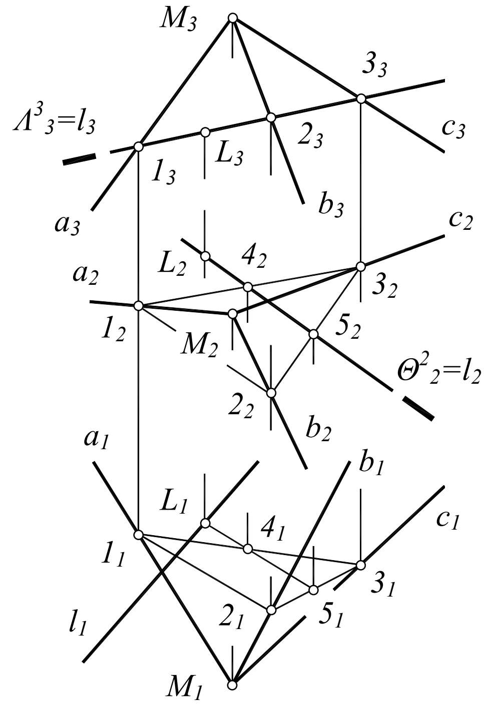



**Рис. 15.23**

проецирующую гиперплоскость $\Sigma^3$, находим линию $a=1\text{-}2$ пересечения плоскости $\Delta^2$ и гиперплоскости $\Sigma^3$. Размерность задачи понизилась, так как теперь достаточно найти общую точку прямых $a$ и $l$ в трехмерном подпространстве $\Sigma^3$. Но из чертежа (см. рис. 15.22) следует, что принадлежащие гиперплоскости $\Sigma^3$ прямые $a=1\text{-}2$ и $l$ не имеют общей точки (скрещиваются). Следовательно, прямая и плоскость общего положения в четырехмерном пространстве не пересекаются.

Прямая и плоскость пространства $E^4$ пересекаются лишь в том случае, если они принадлежат одной гиперплоскости. Например, возьмем в произвольной плоскости $\Delta^2$ пространства $E^4$ какую-либо точку $L$ и проведем через нее произвольную прямую $l$, не лежащую в $\Delta^2$. Получаем пересекающиеся прямую и плоскость, что, казалось бы, противоречит утверждению, что прямая и плоскость в четырехмерном пространстве не пересекаются. На самом деле противоречия нет, так как пересекающиеся прямая $l$ и плоскость $\Delta^2$ занимают в четырехмерном пространстве не общее, а частное положение (прямая $l$ и плоскость $\Delta^2$ заключены в общую гиперплоскость).

### *15.5.2. Прямая и гиперплоскость*

Покажем, что прямая линия $l$ и произвольная гиперплоскость $\Sigma^3$ четырехмерного пространства пересекаются в точке.

Пусть гиперплоскость $\Sigma^3$ задана тремя пересекающимися в одной точке прямыми $a$, $b$, $c$ (рис. 15.23). Чтобы понизить размерность задачи, заключаем прямую $l$ во вспомогательную проецирующую гиперплоскость $\Lambda^3$ и находим плоскость *123*, общую для гиперплоскостей $\Sigma^3$ и $\Lambda^3$. Так как прямая $l$ и плоскость *123* "погружены" в одну и ту же гиперплоскость $\Lambda^3$, то они пересекутся в некоторой точке $L$. Эта точка является искомой точкой пересечения подпространств $l$ и $\Sigma^3$.

Плоскость *123* и прямая $l$ вложены в трехмерное подпространство $\Lambda^3$, поэтому их взаимное положение вполне определяется двумя невырожденными проекциями на обобщенном чертеже Монжа. Точка $L=l\cap 123$ на таком чертеже "пониженной размерности" может быть найдена по обычному алгоритму:

1. Через $l$ проводим проецирующую плоскость $\Theta^2$.
2. Строим линию пересечения *4-5* плоскости *123* и плоскости $\Theta^2$.
3. Отмечаем искомую точку $L=l\cap(4\text{-}5)$.

Заметим, что вместо вспомогательной плоскости $\Theta^2$ может быть использована проецирующая гиперплоскость $\Theta^3$ пространства $E^4$. При этом алгоритм и его графическая реализация полностью сохраняются:

1. Через $l$ проводим проецирующую гиперплоскость $\Theta^3$.
2. Строим линию пересечения *4-5* плоскости *123* и гиперплоскости $\Theta^3$.
3. Отмечаем искомую точку $L=l\cap(4\text{-}5)$.

### *15.5.3. Плоскость и гиперплоскость*

Плоскость $\Delta^2$ и гиперплоскость $\Sigma^3$ четырехмерного пространства пересекаются по прямой линии, для построения которой достаточно определить две общие точки данных множеств. Проведем в плоскости $\Delta^2$ две произвольные прямые и по алгоритму, изложенному в предыдущем параграфе, определим точки пересечения этих прямых с гиперплоскостью $\Sigma^3$. Искомая прямая проходит через найденные точки. Задача решена.

### *15.5.4. Две плоскости*

Даны две плоскости общего положения $\Delta^2(ABC)$ и $\Phi^2(m||n)$. Требуется построить точку их пересечения (рис. 15.24).

Одну из данных плоскостей заключаем в какую-либо гиперплоскость общего положения. На рис. 15.24 плоскость $\Delta^2(ABC)$ заключена в гиперплоскость $\Sigma^3(ABCN)$, где точка $N$ инцидентна плоскости $\Phi^2$ (точка $N$ произвольно отмечена на прямой $n$). Такой выбор "объемлющей" гиперплоскости позволяет несколько упростить последующие построения.

Таким образом, одна из данных плоскостей (плоскость $\Delta^2$) полностью погружена в гиперплоскость $\Sigma^3$, а другая (плоскость $\Phi^2$) – пересекается с $\Sigma^3$ по некоторой прямой $l$. Прямая $l$ и плоскость $\Delta^2$ обязательно пересекутся, так как они погружены в общую гиперплоскость $\Sigma^3$. Точка $L=l\cap\Delta^2$ принадлежит как плоскости $\Delta^2$, так и плоскости $\Phi^2$, следовательно, это и есть искомая точка пересечения заданных плоскостей.

Рассмотрим алгоритм решения задачи на обобщенном чертеже Монжа.

1. Находим прямую $l$ пересечения плоскости $\Phi^2(m||n)$ и гиперплоскости $\Sigma^3$. Благодаря специальному выбору объемлющей гиперплоскости $\Sigma^3$, одна точка этой прямой заранее известна (точка $N=n\cap\Sigma^3$), поэтому для построения всей прямой $l$ достаточно найти еще одну точку, общую для $\Phi^2$ и $\Sigma^3$.

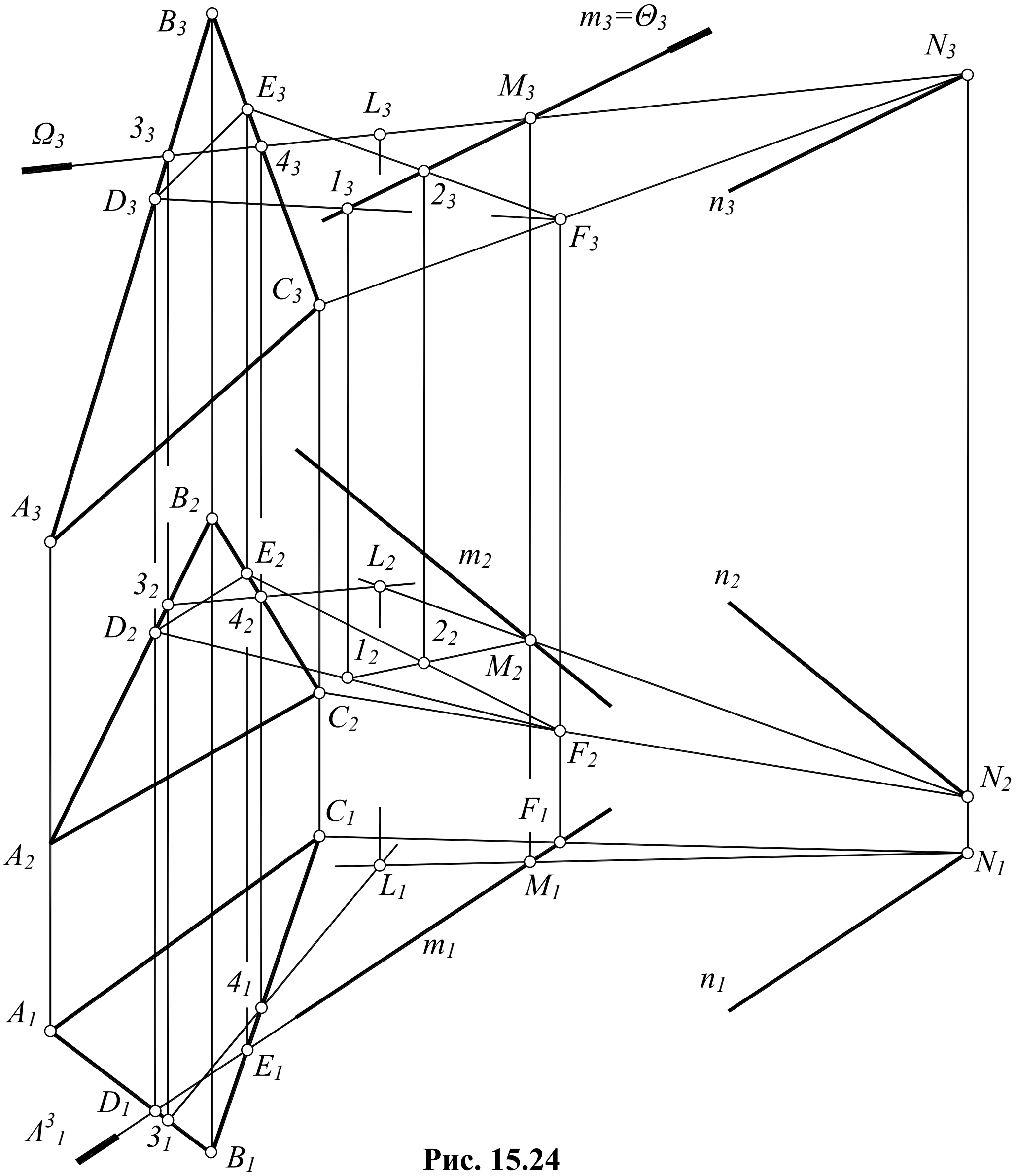



**Рис. 15.24**

Например, найдем точку $M$ пересечения прямой $m$ с гиперплоскостью $\Sigma^3$. Для этого (в соответствии с алгоритмом, изложенным в п. 15.5.2) проводим через прямую $m$ проецирующую гиперплоскость $\Lambda^3$, которая пересекается с гиперплоскостью $\Sigma^3(ABCN)$ по плоскости $DEF$. Прямая $m$ и плоскость $DEF$, "погруженные" в проецирующую гиперплоскость $\Lambda^3$, должны пересечься в некоторой точке $M$.

Для построения точки $M=m\cap DEF$ проводим через $m$ вспомогательное проецирующее подпространство $\Theta$, строим линию пересечения $1$-$2$ плоскости $DEF$ и подпространства $\Theta$, затем отмечаем точку $M$ на пересечении прямых $m$ и $1$-$2$.

Прямая $l=MN$ есть линия пересечения плоскости $\Phi^2(m||n)$ и вспомогательной гиперплоскости $\Sigma^3(ABCN)$.

2. Плоскость $\Delta^2$ и прямая $l=MN$ погружены в объемлющую гиперплоскость $\Sigma^3$, поэтому они пересекутся в некоторой точке $L$. Для построения точки $L$ проводим через

$l=MN$ проецирующее подпространство $\Omega$, которое пересекает плоскость $\Delta^2(ABC)$ по прямой *3-4*. Прямые $l$ и *3-4* пересекаются в искомой точке $L=\Delta^2\cap\Phi^2$.

**Примечание.** Подпространства $\Theta$ и $\Omega$ могут считаться либо проецирующими гиперплоскостями на обобщенном чертеже Монжа, либо проецирующими плоскостями на обычном двухпроекционном чертеже, состоящем из полей $\Pi_2$ и $\Pi_3$.

### *15.5.5. Две гиперплоскости*

Две произвольные гиперплоскости четырехмерного пространства пересекаются по *2- плоскости*. Рассмотрим алгоритм построения общей плоскости двух данных гиперплоскостей $\Delta^3$ и $\Phi^3$.

В одной из данных гиперплоскостей (например, в $\Delta^3$) выделяем произвольную прямую $a$ и находим точку $A$ пересечения этой прямой с гиперплоскостью $\Phi^3$. Точка $A$ – общая точка множеств $\Delta^3$ и $\Phi^3$.

Трижды повторяя описанную процедуру, получим три общие точки данных подпространств $\Delta^3$ и $\Phi^3$, через которые проходит искомая плоскость. Алгоритм построения точки пересечения прямой и гиперплоскости изложен в п. 15.5.2.

## 15.6. “Клетка” в четырехмерном пространстве

Отметим на прямой линии $l=x$ две точки $O$ и $L$, а между ними – точку $A$. Нам не удастся переместить точку $A$ вдоль прямой в положение $A'$, минуя граничные точки отрезка $OL$. Но можно покинуть ось $x$, выйдя из одномерного пространства $x$ в двумерное пространство листа бумаги, и “перескочить” граничную точку (рис. 15.25, *а*).

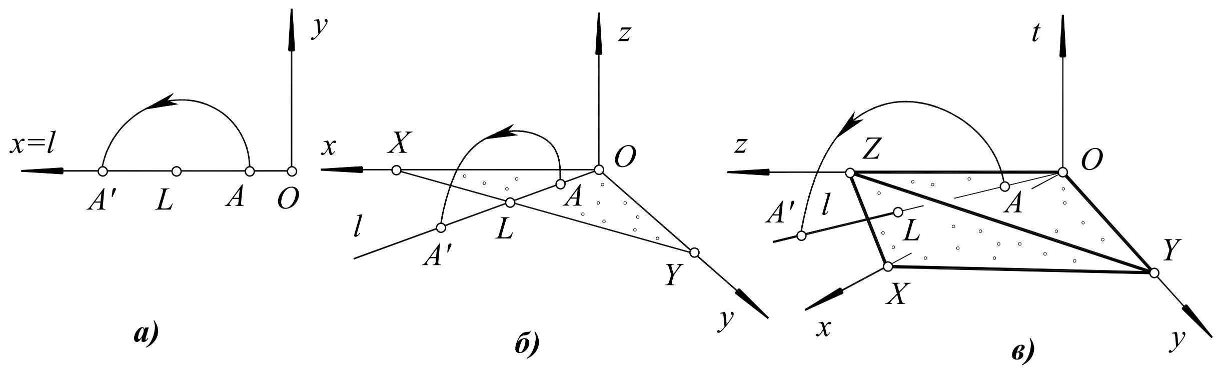


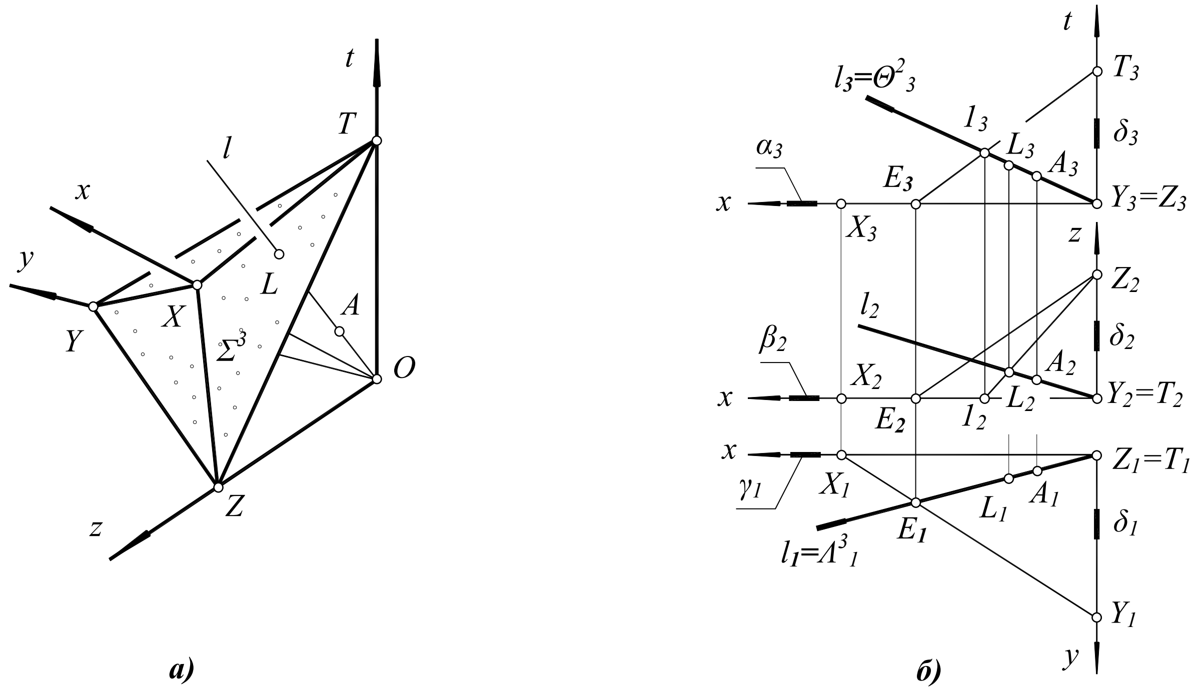

**Рис. 15.25**

Начертим в плоскости $xy$ треугольник $OXY$, а внутри – точку $A$. Как бы мы ни двигали точку по плоскости, извлечь ее из треугольной клетки невозможно. Но стоит только “выйти в третье измерение”, и точку легко вынуть из треугольника, подняв ее вверх, над плоскостью. У всех точек плоскости $xy$ координата $z$ равна нулю. Поэтому достаточно переместить точку $A$ в направлении оси $z$ (то есть придать координате $z_A$ точки $A$ ненулевое значение), и точка покинет не только треугольную клетку $OXY$, но всю координатную плоскость $xy$ (рис. 15.25, *б*).

Аналогично дело обстоит в трехмерном пространстве. Если имеется четырехгранник $OXYZ$, внутри которого заключена точка $A$, то, не прорывая грани тетраэдра, невозможно вынуть из него точку. Но если бы существовало четвертое измерение, то можно было бы “поднять” точку над трехмерным пространством (над координатной гиперплоскостью $xyz$) в направлении четвертого измерения $t$, а затем снова вложить ее в гиперплоскость $xyz$, но уже вне четырехгранника $OXYZ$. Действительно, у всех точек, лежащих в гиперплоскости $xyz$, координата $t$ равна нулю, так как ось $t$ перпендикулярна гиперплоскости $xyz$. Следовательно, можно переместить точку $A$ в направлении оси $t$ (придать координате $t_A$ точки $A$ ненулевое значение), и точка выйдет не только из тетраэдра $OXYZ$, но и из всего трехмерного пространства $xyz$ (рис. 15.25, *в*).

### *15.6.1. Гиперпятигранник*

Возникает естественный вопрос: какова должна быть простейшая клетка, ограничивающая перемещение точки в пространстве $E^4$? “Стенки” такой клетки не могут быть образованы обычными плоскостями, так как точка в четырехмерном пространстве способна перемещаться по прямолинейной или криволинейной траектории, не пересекаясь ни с одной из плоскостей, заполняющих пространство $E^4$.




**а)** **б)**

**Рис. 15.26**

Поясним последнее утверждение, обратившись к аналогии с пространством трех измерений. Очевидно, в $E^3$ бесполезно сооружать клетку из прямых линий (прутьев). Точка свободно преодолеет такое препятствие, поскольку траектория точки и любой прут клетки в общем случае не пересекаются (скрещиваются). Аналогично, траектория точки пространства $E^4$ в общем случае не пересекается (скрещивается) с любой плоскостью, вложенной в это пространство.

Простейшая клетка одномерного пространства – две точки (*две 0-плоскости*), исполняющие роль стенок клетки. Простейшая клетка двумерного пространства – треугольник. В этом случае клетка образована тремя прямыми (*тремя 1-плоскостями*). В трехмерном пространстве элементарная клетка – четырехгранник, грани которого – четыре обычные плоскости (*четыре 2-плоскости*). Три грани могут быть совмещены с плоскостями проекций $\Pi_1$, $\Pi_2$, $\Pi_3$, а четвертая должна занимать общее положение.

Продолжая аналогичные рассуждения, приходим к выводу, что в четырехмерном пространстве простейшей клеткой служит “гиперпятигранник”, грани которого – пять гиперплоскостей (*пять 3-плоскостей*). Четыре грани могут быть совмещены с гиперплоскостями проекций $\alpha^3=xyz$, $\beta^3=xyt$, $\gamma^3=xzt$, $\delta^3=yzt$. В этом случае пятая грань должна быть гиперплоскостью общего положения $\Sigma^3(XYZT)$, где $X$, $Y$, $Z$, $T$ – точки пересечения $\Sigma^3$ с координатными осями (рис. 15.26, *а*).

Точка $A$ пространства $E^4$ может находиться либо вне, либо внутри рассматриваемой гиперклетки. Проведем через начало координат $O$ и точку $A$ прямую $l$, которая пересекается с гранью $\Sigma^3$ в некоторой точке $L$. Все точки, находящиеся на отрезке $OL$ (в том числе точка $A$), заключены в гиперклетку. Извлечь их оттуда, не пересекая ни одну из пяти гиперграней, не удастся.

**Задача.** Пусть на обобщенном чертеже задана гиперклетка пространства $E^4$, образованная четырьмя гиперплоскостями проекций $\alpha^3$, $\beta^3$, $\gamma^3$, $\delta^3$ и гиперплоскостью общего положения $\Sigma^3$, пересекающейся с осями координат в точках $X$, $Y$, $Z$, $T$. Требуется определить, находится данная точка $A$ внутри или снаружи гиперклетки (рис. 15.26, *б*).

Из начала координат проводим через точку $A$ прямую $l$, которая пересекается с $\Sigma^3$ в некоторой точке $L$. Для построения точки $L$ используем способ "понижения размерности": вводим в рассмотрение проходящую через $l$ вспомогательную проецирующую гиперплоскость $\Lambda^3$ (см. п. 15.5.2). Гиперплоскости $\Sigma^3$ и $\Lambda^3$ пересекаются по плоскости $\Delta^2(EZT)$. Прямая $l$ и плоскость $\Delta^2$, "погруженные" в общую гиперплоскость $\Lambda^3$, пересекаются в искомой точке $L$. Чтобы отметить эту точку, проведем через $l$ обычную плоскость $\Theta^2$, пересекающую плоскость $\Delta^2(EZT)$ по линии $1$-$Z$. На пересечении прямых $l$ и $1$-$Z$ отмечаем точку $L$. Точка $A$ находится между точками $O$ и $L$, следовательно, она заключена внутри гиперклетки.

### *15.6.2. Гиперкуб*

Чтобы на плоскости начертить квадрат, надо провести прямые $x'$, $y'$, параллельные осям $x$, $y$ декартовой системы координат (на равных расстояниях от осей). При этом две стороны квадрата будут совмещены с осями координат.

Чтобы в трехмерном пространстве начертить куб, проводим три плоскости, параллельные координатным плоскостям $\Pi_1=xy$, $\Pi_2=xz$, $\Pi_3=yz$ (на равных расстояниях от плоскостей проекций). Три грани куба при этом совмещены с плоскостями проекций.

Аналогичным образом, чтобы в четырехмерном пространстве начертить гиперкуб, проводим четыре гиперплоскости $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$, $\delta'$, параллельные гиперплоскостям проекций $\alpha=xyz$, $\beta=xyt$, $\gamma=xzt$, $\delta=yzt$ (на равных расстояниях от гиперплоскостей проекций). Гиперкуб имеет восемь попарно параллельных трехмерных граней, четыре из которых, в соответствии с рассмотренной конструктивной моделью, совмещены с гиперплоскостями проекций. Каждая пара граней перпендикулярна какой-либо плоскости проекций, поэтому на обобщенном чертеже проекции гиперграней вырождаются в прямые линии (рис. 15.27). Точка $A$ заключена внутри гиперкуба.

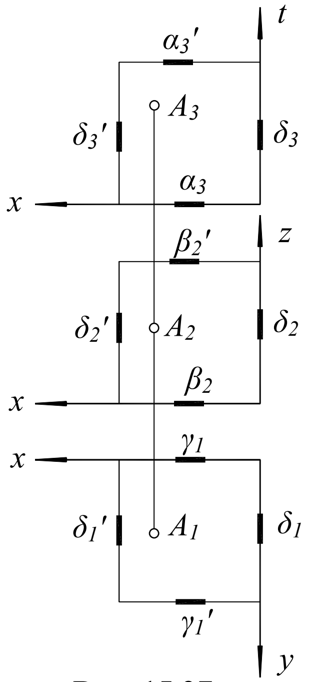


**Рис. 15.27**

### *15.6.3. Гиперсвязка*

Множество прямых, проходящих через данную точку $O$ трехмерного пространства, называют *связкой прямых* с центром $O$. Возьмем в расширенном евклидовом пространстве $E^3$ произвольную плоскость $\Delta^2$, не проходящую через точку $O$. Между точками плоскости $\Delta^2$ и лучами связки устанавливается взаимно однозначное проекционное соответствие. На плоскости имеется $\infty^2$ точек, следовательно, связка в пространстве $E^3$ – двупараметрическое множество прямых.

**Определение.** *Множество прямых, проходящих через точку O четырехмерного пространства, называют гиперсвязкой с центром O.*

В четырехмерном пространстве существует взаимно однозначное проекционное соответствие между лучами гиперсвязки и точками гиперплоскости общего положения, поэтому в гиперсвязке имеется $\infty^3$ прямых (столько же, сколько точек на гиперплоскости). С помощью лучей гиперсвязки можно осуществить центральное проецирование точек пространства $E^4$ на какую-либо “картинную гиперплоскость” $\Sigma^3$, не проходящую через центр гиперсвязки (отобразить пространство $E^4$ на пространство $E^3$).

*Вопросы для повторения*

1. Дать определение понятию “размерность пространства”.

2. Сколько проекций должен содержать обратимый чертеж геометрической фигуры четырехмерного пространства?

3. Прямая линия содержит $\infty^1$ точек. Сколько точек содержится в гиперплоскости четырехмерного пространства?

4. Пересекаются ли в четырехмерном пространстве прямая линия и *2*-плоскость общего положения?

5. В каком случае гиперплоскость четырехмерного пространства изображается на чертеже прямой линией?

6. Сколько перпендикуляров к плоскости проекций $\Pi_1$ можно провести через какую-нибудь точку этой плоскости? Сколько перпендикуляров к плоскости $\Pi_1$ можно провести через произвольно взятую точку четырехмерного пространства?