

Лекция 14

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРАФИКА В НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Компьютерная графика – наука, предметом изучения которой является создание, обработка и хранение изображений с помощью ЭВМ.

Компьютерная графика используется в работе архитекторов, строителей, конструкторов, разработчиков новой техники. В разработке технических устройств принимают участие не только конструкторы, но и технологи, специалисты по инженерным расчетам, дизайнеры, экономисты и др. Чтобы согласовать их работу, упростить и облегчить процесс взаимопонимания, сохранения и передачи необходимой информации, создается так называемая *система автоматизированного проектирования*.

14.1. Система автоматизированного проектирования

Системой автоматизированного проектирования (САПР) называют комплекс технических и программных средств, предназначенных для автоматизации процесса проектирования.

Система автоматизированного проектирования может использоваться в следующих целях:

- для разработки геометрической модели изделия (CAD);
- для выполнения инженерных расчетов (CAE);
- для технологической подготовки производства (CAM).

Аббревиатура CAD (computer-aided design) означает использование компьютера для разработки геометрической модели изделия. Существует множество программных средств для создания геометрических моделей. Например, широко применяются программы ArchiCAD (для архитекторов и строителей), AutoCAD (для инженеров-механиков) и другие.

Термин CAE (computer-aided engineering) обозначает комплекс программных средств, предназначенных для выполнения инженерных расчетов.

Для подготовки и организации процесса производства на станках с числовым программным управлением используют автоматизированную систему технологической подготовки производства CAM (computer-aided manufacturing).

Универсальная САПР, позволяющая решать как задачи геометрического моделирования и расчета, так и технологической подготовки производства, обозначается аббревиатурой CAD/CAE/CAM.

Для разных технических отраслей разрабатываются разные САПР. Например, для конструкторов легких спортивных самолетов и для разработчиков металлургического оборудования требуются совершенно разные программные средства, базы данных и методики расчета. Поэтому существуют сотни специализированных САПР, в которых используются самые разные программные средства и массивы справочной информации. Объединяет их один общий признак – любую САПР возможно разработать и практически реализовать только с помощью ЭВМ. Произошедшую в конце 20 века повсеместную компьютеризацию всех сторон человеческой деятельности совершенно обобщенно называют *информационной революцией*.

14.2. Информационные революции

В истории развития цивилизации произошло несколько информационных революций. *Первая информационная революция* связана с изобретением письменности. Появи-

лась возможность передачи знаний от поколения к поколению. *Вторая революция* (середина 16 века) вызвана изобретением книгопечатания. *Третью информационную революцию* (конец 19 века) связывают с открытием и практическим использованием электричества. Появились телеграф, телефон, магнитофон, радиосвязь, что позволило оперативно передавать и накапливать информацию.

Четвертая информационная революция (70-е годы 20 века) обусловлена изобретением микропроцессорной технологии и появлением персонального компьютера. Особенно большое влияние на развитие компьютерной техники оказал открытый в 1988 году GMR-эффект (аббревиатура физического термина Giant MagnetoResistive – гигантское магнитное сопротивление). GMR-эффект – это свойство сверхтонких (толщиной 1...5 нанометров) металлических пленок очень сильно изменять свое электрическое сопротивление под действием переменного магнитного поля.

Один нанометр – это десять ангстрем. В ангстремах измеряют межатомное расстояние в кристаллической решетке твердого вещества. Например, в кристаллической решетке железа расстояние между атомами составляет около 3 ангстрем, то есть 0,3 нанометра. Следовательно, в металлической пленке толщиной 3 нанометра “умещается” всего 10 слоев атомов железа. Такая сверхтонкая пленка обладает особыми свойствами, в частности, демонстрирует GMR-эффект. На изменении физических свойств вещества при уменьшении размеров его частиц до наноуровня основаны современные нанотехнологии.

Используя сверхтонкие пленки из магнитного материала, удалось разработать так называемые GMR-сенсоры (миниатюрные сверхчувствительные датчики, реагирующие на изменение магнитного поля изменением своего электрического сопротивления). Применение таких датчиков для записи и считывания информации с магнитных дисков привело к резкому увеличению быстродействия и объема памяти современных персональных компьютеров. За два последних десятилетия объем памяти возрос от 0,3Gb до 1000Gb, то есть более чем в 3000 раз.

Такое существенное улучшение технических характеристик компьютера привело к появлению разнообразных графических программ, позволяющих выполнять не только обычные плоские чертежи и изображения, но и реализовать так называемую *трехмерную графику*.

14.3. Двумерная и трехмерная графика

Двумерная графика (иногда ее называют 2D-графика) – это построение плоских изображений (чертежей, графиков, диаграмм, схем и т.п.). Например, на экране компьютера можно решать задачи по начертательной геометрии точно так же, как это делается на листе бумаги. Вместо линейки и циркуля учащийся вызывает команды “начертить отрезок” или “начертить окружность”. В этом случае компьютер используется как обычный кульман (кульман – чертежная доска на подставке, к которой кнопками прикрепляется лист ватмана; ватман – плотная бумага для черчения).

Трехмерная графика, или 3D-графика (от английского three dimensions – три измерения) – раздел компьютерной графики, включающий в себя совокупность приемов и программных средств, предназначенных для изображения объемных фигур на экране компьютера.

3D-моделирование – процесс создания виртуальной трехмерной модели объекта. Трехмерная модель существует в матрично-цифровой форме и фиксируется в памяти компьютера. Матрицы содержат координаты характерных точек объекта и коэффициенты уравнений, описывающих криволинейные участки моделируемой фигуры.

С помощью компьютерных средств эти виртуальные фигуры, существующие в цифровом виде, проецируются на плоскость экрана компьютера. Для повышения наглядности получаемого двумерного изображения, для зрительного придания ему “объемности” применяются разнообразные способы визуализации (скрытие невидимых линий, тонирование, оттенение и др.). При этом может достигаться очень высокая степень наглядности (“фотореалистичность”).

Создается впечатление, будто компьютер исполняет роль физически неосуществимого “трехмерного кульмана”, позволяющего чертить не на плоскости, а непосредственно в трехмерном пространстве. Разумеется, на экране компьютера мы видим не 3D-модель объекта (3D-модель существует только в цифровой форме!), а ее проекцию на плоскость экрана монитора.

Нетрудно увидеть аналогию между трехмерной графикой и обычной фотокиносъемкой. В обоих случаях связь между фигурами пространства и их изображениями устанавливается посредством проецирования. Различие состоит в том, что при фотографировании выполняется проецирование на плоскость фотопленки некоего реально существующего объекта, а при 3D-моделировании мы видим на экране компьютера проекцию виртуальной 3D-модели, существующей в матрично-цифровой форме.

Таким образом, в основе трехмерной графики, как и в основе всей начертательной геометрии, лежит *метод проецирования* (см. лекцию 1).

14.4. Аксонометрия как теоретическая основа трехмерной графики

Для формирования на плоскости или на экране компьютера наглядного и вместе с тем обратимого изображения объемной фигуры используется *аксонометрический чертеж* (кратко – аксонометрия).

До сих пор мы рассматривали “двухкартинные” чертежи, составленные из двух проекций объекта. Такой чертеж обладает свойством обратимости, то есть позволяет определить форму и размеры объекта, но не обладает наглядностью.

Чтобы составить чертеж, обладающий одновременно как наглядностью, так и обратимостью, к изображаемому пространственному объекту Φ “жестко прикрепляют” ортогональную систему координат $x_0y_0z_0$ с отмеченными на осях x_0, y_0, z_0 единичными отрезками. Фигуру Φ и прикрепленную к ней систему координат рассматривают как единый объект, который параллельно проецируют на какую-либо плоскость Π .

На рис. 14.1 показаны три изображения $MNKLS$ пирамиды $M_0N_0K_0L_0S_0$ (пирамида проецировалась параллельными лучами на плоскость Π). Изображение на рис. 14.1, *а* – не обратимо. Ни форма, ни тем более размеры объекта – неизвестны. Можно лишь предполагать, что показана четырехугольная пирамида. На рис. 14.1, *б* дополнительно указана проекция S_1 вершины S_0 на плоскость основания. Форма фигуры стала понятнее, но обратимость не обеспечена.

И, наконец, на рис. 14.1, *в* представлено изображение пирамиды вместе с прикрепленной к пирамиде ортогональной системой координат (основание пирамиды совмещено с плоскостью x_0y_0). Полученное изображение обладает свойством обратимости, так как с его помощью можно определить координаты всех точек пирамиды, а значит – все ее размеры. Например, точка M имеет координаты $M(2, 5, 0)$. Такое наглядное и вместе с тем обратимое изображение называют аксонометрическим чертежом.

Определение 1. *Аксонометрический чертеж на плоскости Π – это параллельная проекция на плоскость Π изображаемого объекта и жестко связанной с ним ортогональной системы координат, на осях которой отмечены отрезки единичной длины. Плоскость Π называют аксонометрической плоскостью проекций.*

Обратимость аксонометрического чертежа достигается не только за счет наличия на нем проекций координатных осей. Например, если на аксонометрическом чертеже пирамиды (см. рис. 14.1, в) не указать точку S_1 (эта точка – изображение ортогональной проекции вершины пирамиды S_0 на координатную плоскость x_0y_0), то чертеж утратит определенность. Мы не сумеем определить ни форму, ни высоту пирамиды, несмотря на наличие осей координат. Точку S_1 называют *вторичной проекцией* точки S_0 .

Определение 2. Вторичная проекция S_1 точки S_0 – это изображение (на плоскости проекций Π) ортогональной проекции точки S_0 на какую-либо координатную плоскость системы координат $x_0y_0z_0$, жестко связанной с изображаемой объемной фигурой.

Иначе говоря, вторичная проекция точки – это “проекция проекции” этой точки. Так, точка S_1 изображает не вершину пирамиды, а проекцию вершины на координатную плоскость x_0y_0 , жестко связанную с основанием пирамиды (см. рис. 14.1, в).

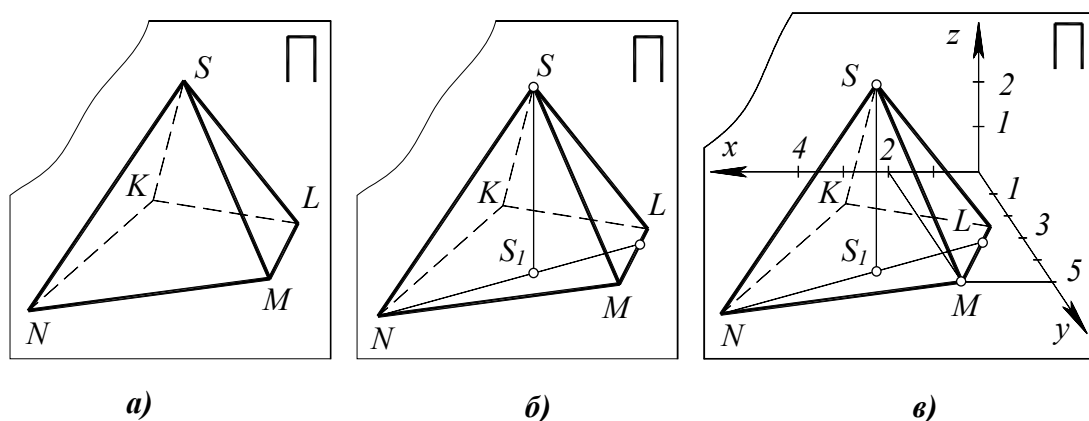


Рис. 14.1

Таким образом, на аксонометрическом чертеже, как и на двухкартинном чертеже Монжа, *любая точка обязательно задается двумя своими проекциями*. Например, на рис. 14.1, в вершина S_0 пирамиды задана своей проекцией S (ее называют *аксонометрической проекцией*) и вторичной проекцией S_1 .

Правило. Аксонометрический чертеж трехмерного объекта только в том случае обладает свойством обратимости, если на нем можно указать вторичную проекцию любой точки изображенного на нем объекта.

14.4.1. Выбор плоскости проекций и направления проецирования

Аксонометрическая плоскость проекций Π , на которую проецируется заданный объект, может быть произвольно расположена в пространстве относительно данного объекта. В САД-системах при изображении виртуальных 3D-фигур на экране компьютера плоскость проекций совпадает с плоскостью экрана, а изображаемая фигура может перемещаться или поворачиваться для обеспечения необходимого ракурса.

Направление проецирования также может быть выбрано произвольным образом. Если проецирующие лучи наклонены к плоскости проекций Π под углом, отличным от прямого, то такая аксонометрия называется *косоугольной*.

Наиболее естественный и наглядный образ объемной фигуры достигается, если проецирующие лучи перпендикулярны к плоскости проекций. Такой вид проецирования называют *ортогональной аксонометрией*. Для формирования изображений виртуальных 3D-объектов в компьютерных САД-системах обычно используют ортогональную аксонометрию (проецирующие лучи перпендикулярны плоскости экрана).

14.4.2. Показатели искажения

Напомним, что мы связали с изображаемым объектом тройку координатных осей x_0, y_0, z_0 . Аксонометрическая плоскость проекций Π в общем случае пересекает все три оси координат (рис. 14.2, а). Проекции осей x_0, y_0, z_0 на аксонометрическую плоскость проекций Π обозначим буквами x, y, z и назовем аксонометрическими осями координат.

Определение. Аксонометрическими осями координат x, y, z называют проекции (на аксонометрическую плоскость проекций Π) осей x_0, y_0, z_0 , жестко связанных с изображаемым трехмерным объектом.

Оси x_0, y_0, z_0 наклонены к плоскости Π , поэтому отрезки, начерченные вдоль этих осей, проецируются на плоскость Π с искажением. Показателем искажения называют отношение длины проекции отрезка к длине самого отрезка. Показатель искажения по аксонометрической оси x обозначают буквой u , по y – буквой v , по z – буквой w . Пусть, например, вдоль координатной оси z_0 отложен отрезок длиной 10 мм, а длина его проекции на плоскости Π равна 7 мм. Тогда показатель искажения по аксонометрической оси z равен $w=0,7$. Очевидно, $u=\cos\alpha$, $v=\cos\beta$, $w=\cos\gamma$, где α, β, γ – углы наклона координатных осей x_0, y_0, z_0 к аксонометрической плоскости проекций Π .

В общем случае, при произвольно выбранной плоскости проекций и произвольно назначенном направлении проецирования, показатели искажения отличаются друг от друга: $u \neq v \neq w$. Такую аксонометрию называют *триметрией*. Если два показателя искажения совпадают, получаем *диметрию*. Если показатели искажения равны ($u=v=w$), то такую аксонометрическую проекцию называют *изометрией*.

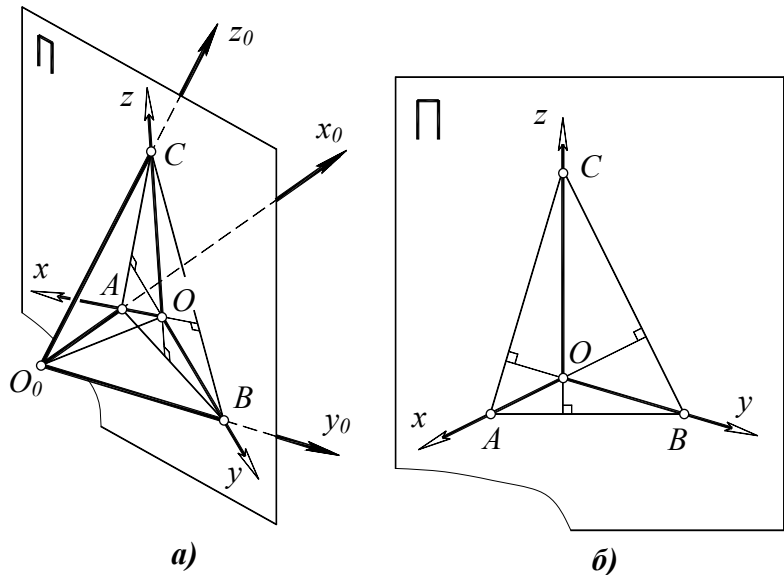


Рис. 14.2

Показатель искажения может принимать значения от нуля до единицы. Если изображаемый отрезок параллелен плоскости проекций Π , то показатель искажения равен единице. Если отрезок располагается перпендикулярно к плоскости проекций, то показатель искажения равен нулю. Чем больше показатель искажения по аксонометрической оси отличается от единицы, тем сильнее искажен размер фигуры вдоль этой оси.

Любая аксонометрия (изометрия, диметрия, триметрия) может быть косоугольной или ортогональной. Например, можно начертить заданный объект в ортогональной изометрии, а можно – в косоугольной диметрии.

Известно, что в ортогональной аксонометрии сумма квадратов показателей искажения равна двум: $u^2 + v^2 + w^2 = 2$. Доказательство этого утверждения выполняется средствами элементарной тригонометрии [3].

14.4.3. Ортогональная аксонометрия

На рис. 14.2, а изображена тройка взаимно перпендикулярных координатных осей x_0, y_0, z_0 , жестко связанная с изображаемым объектом, и аксонометрическая плоскость проекций Π . Сам объект на рисунке не показан (он может иметь любую форму).

Оси координат x_0, y_0, z_0 пересекаются с плоскостью проекций в точках A, B, C . Треугольник ABC называют *треугольником следов*. Его стороны – это линии пересечения координатных плоскостей x_0y_0, x_0z_0, y_0z_0 с аксонометрической плоскостью проекций Π .

Рассмотрим ортогональную проекцию координатных осей x_0, y_0, z_0 на плоскость Π . Точка O – ортогональная проекция начала координат O_0 на плоскость Π , луч O_0O – направление проецирования, перпендикулярное плоскости проекций Π . Напомним, что проекции x, y, z координатных осей x_0, y_0, z_0 называют аксонометрическими осями.

Теорема 1. В случае ортогонального проецирования аксонометрические оси x, y, z перпендикулярны сторонам треугольника следов (рис. 14.2, б).

Доказательство. Покажем, что луч z перпендикулярен к стороне AB . Ось z_0 перпендикулярна плоскости x_0y_0 , так как оси x_0, y_0, z_0 взаимно перпендикулярны. Прямая AB лежит в плоскости x_0y_0 , следовательно, скрещивающиеся прямые z_0 и AB взаимно перпендикулярны. Прямая AB лежит в плоскости Π , поэтому можно сказать, что AB параллельна плоскости Π . Согласно следствию из теоремы о проекциях прямого угла (см. п. 4.2), если одна из взаимно перпендикулярных скрещивающихся прямых ($AB \perp z_0$) параллельна плоскости проекций Π , то проекции этих прямых взаимно перпендикулярны, то есть $AB \perp z$. Аналогично доказывается перпендикулярность аксонометрических осей x, y соответствующим сторонам треугольника следов. Теорема доказана.

Любое сечение ABC ортогональной тройки прямых x_0, y_0, z_0 всегда является остроугольным треугольником. Следовательно, треугольник следов всегда остроугольный.

Теорема 2. Если задан треугольник следов (произвольный, но обязательно остроугольный!), то тем самым вполне определены не только положения аксонометрических осей, но и показатели искажения u, v, w по аксонометрическим осям x, y, z (доказательство и графический алгоритм определения показателей искажения даны в [3]).

Правило. Любой остроугольный треугольник на плоскости проекций Π может быть принят за треугольник следов ортогонального аксонометрического чертежа. Направления высот этого треугольника указывают положение аксонометрических осей x, y, z . При этом полностью определены не только направления аксонометрических осей, но и показатели искажения по этим осям.

14.4.4. Ортогональная изометрия

Если координатные оси x_0, y_0, z_0 одинаково наклонены к плоскости проекций Π , то получаем *ортогональную изометрию*. Треугольник следов становится равносторонним, а аксонометрические оси x, y, z располагаются под углом 120° друг к другу (рис. 14.3).

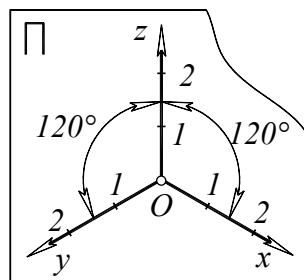


Рис. 14.3

Показатель искажения $u=v=w$ вычисляется из условия $u^2+v^2+w^2=2$. Отсюда $u=v=w=\sqrt{2/3} \approx 0,816$, поэтому при построении изометрии истинный размер объекта по любой оси координат приходится умножать на $0,816$. Чтобы не выполнять это неудобное вычисление, полагают показатели искажения равными единице, и в процессе построения откладывают по аксонометрическим осям истинные размеры изображаемой фигуры. При этом вид изображения не изменяется, но оно становится увеличенным примерно в $1/0,816 \approx 1,22$ раза. Такое изображение называют *приведенной изометрией*.

14.4.5. Ортогональная диметрия

Расположим систему координат $x_0y_0z_0$ и жестко связанный с ней изображаемый объект относительно плоскости проекций Π таким образом, чтобы показатели искажения u , w по осям x и z были равны между собой, а показатель искажения по оси y – в два раза меньше: $u = w$, $v = 0,5u$. При этом оси x_0 и z_0 одинаково наклонены к аксонометрической плоскости проекций Π , а ось y_0 располагается к плоскости Π под некоторым увеличенным углом. Если ортогонально спроецировать изображаемый объект и связанную с ним систему координат на плоскость Π , то получим *ортогональную диметрию*.

Числовые значения показателей искажения определяются из условия: $u^2 + v^2 + w^2 = 2$. Подставляя сюда $u = w$, $v = 0,5u$, получаем: $u^2 + (0,5u)^2 + u^2 = 2$. Отсюда $u = \sqrt{(2/2,25)} \approx 0,943$. Следовательно, по осям x и z показатели искажения равны $u = w = 0,943$, а по оси y показатель искажения $v = 0,5u \approx 0,471$. Поэтому при построении диметрии приходится откладывать по осям x и z размеры объекта, умноженные на $0,943$, а по оси y – размер, умноженный на $0,471$. Чтобы не выполнять эти неудобные вычисления, принимают показатели искажения u и w по осям x, z равными единице; при этом показатель искажения по оси y должен быть равен $v = 0,5$. В процессе построения откладывают по осям x и z истинные размеры фигуры, а по оси y все размеры фигуры уменьшают в два раза. Вид изображения при таком “округлении” показателей искажения не меняется, но оно становится увеличенным приблизительно в $1/0,943 = 1,06$ раза. Такое изображение называют *приведенной ортогональной диметрией*.

Определение углов между аксонометрическими осями в ортогональной диметрии

1. Координатные оси x_0 и z_0 одинаково наклонены к плоскости проекций Π , поэтому $O_0A = O_0C$ (рис. 14.4, а). Примем $O_0A = O_0C = 1$. Тогда $OC = OA = u$, где $u = w = \sqrt{(2/2,25)}$ – ранее найденный показатель искажения по осям x и z .

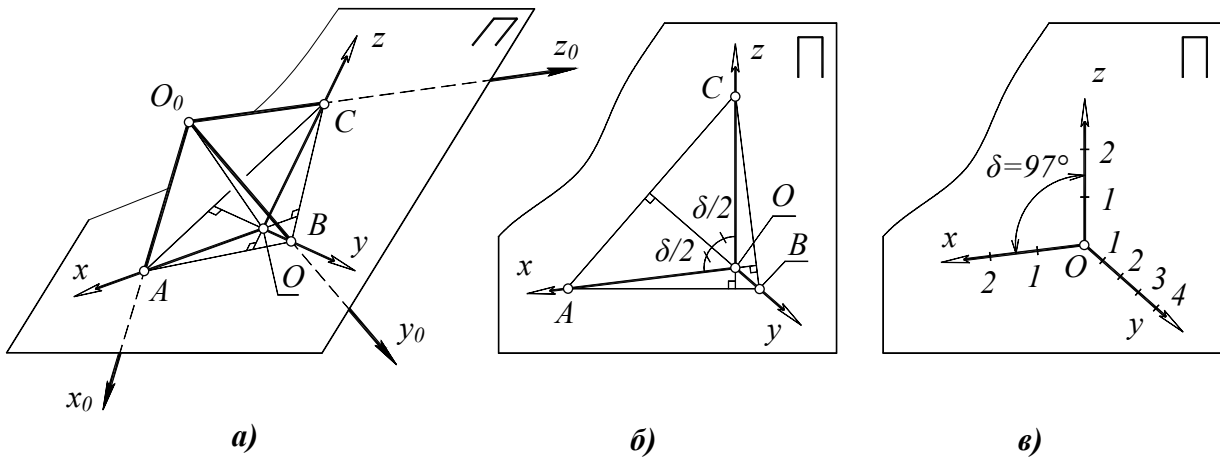


Рис. 14.4

2. Рассмотрим прямоугольный треугольник AO_0C . Длина его гипотенузы, согласно теореме Пифагора, равна: $AC^2 = O_0A^2 + O_0C^2 = 2$.

3. Угол δ между аксонометрическими осями x и z равен углу при вершине равнобедренного треугольника AOC (рис. 14.4, б). Основание этого треугольника равно $AC = \sqrt{2}$, а боковые стороны $OC = OA = u = \sqrt{(2/2,25)}$. После элементарных расчетов получаем $\delta \approx 97^\circ$.

4. Согласно теореме 1 (см. п. 14.4.3), аксонометрическая ось y перпендикулярна стороне AC равнобедренного треугольника следов ABC , следовательно, ось y совпадает с биссектрисой угла δ (см. рис. 14.4, б).

Таким образом, на ортогональном диметрическом чертеже аксонометрические оси x и z составляют угол 97° , а ось y – биссектриса этого угла. При построении приведенной диметрии координаты произвольной точки $A(x_A, y_A, z_A)$ откладываются по осям x и z без искажения, а по оси y координата y_A уменьшается в два раза (рис. 14.4, в).

14.4.6. Косоугольная аксонометрия

Косоугольная аксонометрия обладает одним существенным недостатком: она способна неестественно исказить форму изображаемого объекта. Например, косоугольная проекция сферы – эллипс. Вряд ли зритель сумеет в эллипсе “опознать” сферу.

Рассмотрим еще один пример. На восходе или закате солнца тень от куба, падающая на землю, может быть очень вытянутой. Тень сохраняет параллельность ребер, но совершенно искажает пропорции куба. В данном случае тень – это косоугольная аксонометрическая проекция куба на горизонтальную плоскость. Такое изображение искажает пропорции предмета и лишено наглядности.

Тем не менее, есть некоторые практически приемлемые варианты косоугольного проецирования. Например, фронтальную плоскость проецируемого объекта (плоскость xz) можно разместить параллельно аксонометрической плоскости проекций. Тогда при любом направлении проецирования размеры объекта по осям x , z сохраняются. Если проецировать лучами, наклоненными к плоскости проекций под углом 45° , то любой отрезок вдоль оси y также проецируется в истинную величину. Получается *косоугольная фронтальная изометрия*. Иногда такой вид аксонометрии называют *кавалерной проекцией*. На рис. 14.5, а изображен куб в кавальерной проекции.

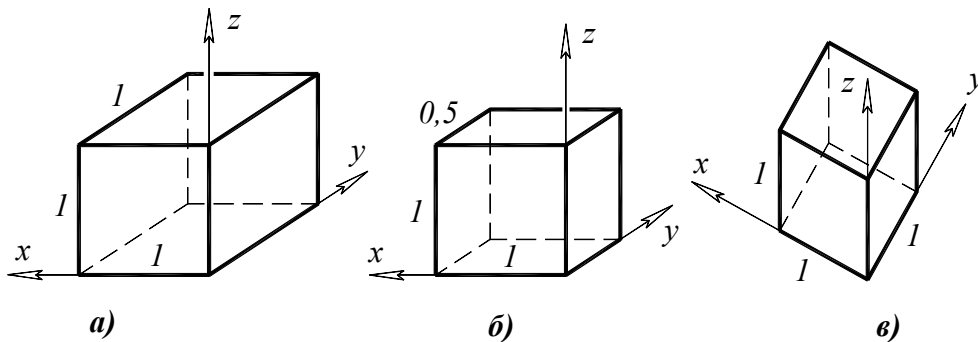


Рис. 14.5

Можно сохранить параллельность плоскости xz и аксонометрической плоскости проекций, но направление проецирования выбрать под углом, отличным от 45° . Получим *косоугольную фронтальную диметрию*. В этом случае по осям x и z размеры объекта сохраняются, а по оси y – искажаются. Показатель искажения зависит от направления проецирования. Такую аксонометрию называют *кабинетной проекцией*. Обычно по оси y размеры объекта сокращают в два раза. При этом получается наиболее естественное изображение (куб на рис. 14.5, б).

При построении планов жилой застройки применяют *косоугольную горизонтальную изометрию* (аксонометрическая плоскость проекций – горизонтальная, угол наклона проецирующих лучей 45°). Такое изображение условно принято называть *военной перспективой* (куб на рис. 14.5, в). Слово “перспектива” здесь не вполне уместно, поскольку

ку перспективной называют центральную проекцию, а в данном случае речь идет о параллельной проекции.

Рассмотренные выше пять видов аксонометрических проекций (две ортогональные и три косоугольные) рекомендованы стандартом для выполнения аксонометрических изображений. Самым наглядным изображением, лишенным заметных искажений формы, является ортогональная диметрия.

14.4.7. Основная теорема аксонометрии

Предположим, что в пространстве дан произвольный тетраэдр (четырёхгранник) $M_0N_0K_0L_0$, который проецируется параллельными лучами на произвольную плоскость проекций Π по произвольному направлению. Проекция тетраэдра – полный четырёхугольник $MNKL$ (рис. 14.6). Полным четырёхугольником называют обычный четырёхугольник, но с начерченными диагоналями. Меняя направление проецирования и положение плоскости проекций Π , будем получать разные проекции тетраэдра. Но всякий раз это будут полные четырёхугольники.

Еще раз подчеркнем, что дан совершенно произвольный, случайный тетраэдр. У него ребра разной длины, разные углы при вершинах. Это неправильный четырёхгранник. Вполне естественно предположить, что проекция неправильного четырёхгранника – неправильный полный четырёхугольник.

Зададим следующий вопрос. *Может ли неправильный тетраэдр проецироваться на плоскость какой-нибудь правильной фигурой (квадратом, прямоугольником, ромбом)?*

На первый взгляд кажется, что это невозможно. “Здравый смысл” подсказывает нам, что проекция (условно говоря, фотография) неправильного тетраэдра никак не может выглядеть квадратом или ромбом.

Оказывается, здесь геометрическая интуиция нас подводит. Основная теорема аксонометрии утверждает, что всегда можно выбрать направление проецирования и положение плоскости проекций так, чтобы заранее заданный произвольный тетраэдр проецировался в квадрат. Или в ромб. Или в равнобочную трапецию. Или в любой другой четырёхугольник.

Иначе говоря, любой произвольный четырёхгранник с ребрами разной длины может проецироваться в четырёхугольник, подобный любому заранее начерченному полному четырёхугольнику.

Это утверждение было доказано К. Польке для одного частного случая и обобщено Г. Шварцем. В окончательном виде теорема формулируется следующим образом [3].

Теорема Польке-Шварца. *Всякий полный четырёхугольник можно рассматривать как косоугольную параллельную проекцию тетраэдра наперед заданной формы.*

Из теоремы следует, что любые три отрезка на плоскости (все – произвольной длины), исходящие из одной точки, можно рассматривать как параллельную проекцию трех взаимно перпендикулярных осей координат единичной длины. Это следствие из теоремы Польке-Шварца называют *основной теоремой аксонометрии*.

Основная теорема аксонометрии. *В косоугольной аксонометрии аксонометрические оси на плоскости чертежа Π и единицы длины на осях могут быть выбраны совершенно произвольно (теорема К. Польке).*

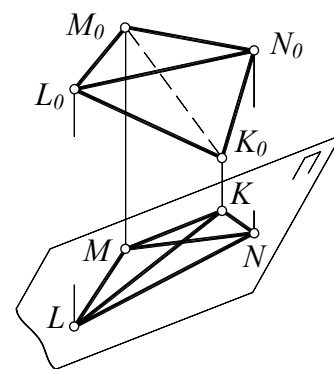


Рис. 14.6

14.5. Трехмерная графика в задачах начертательной геометрии

В начертательной геометрии различают позиционные, метрические и комбинированные задачи. Например, построение точки пересечения прямой и плоскости – это позиционная задача, а определение истинной длины отрезка – метрическая задача. Комбинированные задачи могут содержать как позиционные, так и метрические условия.

14.5.1. Позиционные задачи

Простейшие позиционные задачи, в которых предлагается находить точки и прямые, принадлежащие данной плоскости, рассмотрены в лекции 2. Сравним решение одной из таких задач, выполненное на двухпроекционном чертеже (“метод 2D”) и на экране компьютера (метод 3D”).

Задача 1. Построить горизонталь h в плоскости Σ общего положения, заданной точкой A и прямой линией $m=MN$. Горизонталь требуется провести через точку A .

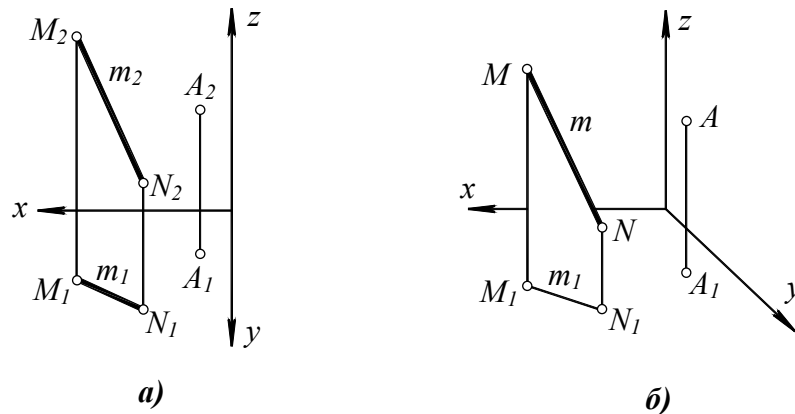


Рис. 14.7

На рис. 14.7, а дан обычный двухпроекционный чертеж точки A и прямой линии m . На рис. 14.7, б показано, как точка A , прямая m и их горизонтальные проекции A_1, m_1 выглядят в виртуальном трехмерном пространстве на экране компьютера. Требуется через точку A провести горизонталь, пересекающую прямую m . Чтобы решить задачу на чертеже (методом 2D), надо провести фронтальную проекцию h_2 горизонтали (до пересечения с фронтальной проекцией прямой MN), затем с помощью линий связи найти недостающую проекцию h_1 искомой горизонтали. Решение показано на рис. 14.8, а. Горизонталь h лежит в плоскости $\Sigma(A, m)$, так как имеет с этой плоскостью две общие точки: точку $I=MN \cap h$ и точку A . Задача решена “методом 2D”.

Немного сложнее решить эту задачу в виртуальном “трехмерном” пространстве компьютера. Конечно, с помощью команды “начертить отрезок” мы сумеем провести сколько угодно произвольных прямых, проходящих через точку A . На экране компьютера эти прямые будут выглядеть так, будто они начерчены прямо “по воздуху” компьютерного 3D-пространства.

Но нам нужно построить не произвольную, а вполне определенную прямую. Эта прямая должна проходить через точку A , пересекать прямую m и при этом располагаться параллельно горизонтальной плоскости $\Pi_1=xy$. Как провести такую прямую?

Оказывается, предоставленной нам возможности “чертить по воздуху” недостаточно для решения задачи. Потребуется использовать горизонтальные проекции данной

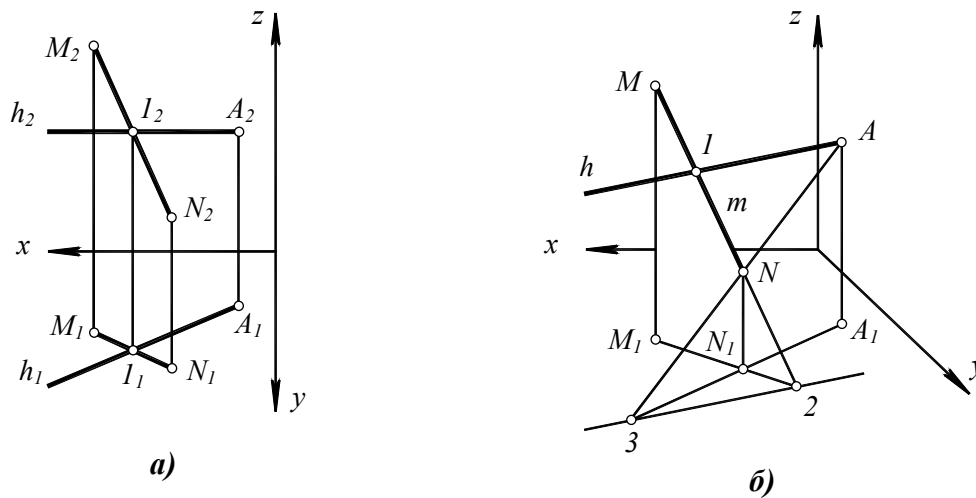


Рис. 14.8

прямой m и точки A . Построение горизонтальных проекций не вызывает затруднений, поскольку в каждой графической программе обязательно предусмотрена возможность проецирования геометрических фигур на любую плоскость.

Найдем точку $2 = MN \cap M_1N_1$ пересечения прямой m с горизонтальной плоскостью xu , удлинив (с помощью команды “удлинить”) отрезок MN и его проекцию M_1N_1 . Затем проведем отрезок AN и найдем точку 3 его пересечения с горизонтальной плоскостью: $3 = AN \cap A_1N_1$ (рис. 14.8, б). Прямая 2-3 располагается горизонтально и принадлежит плоскости $\Sigma(A, m)$. Проведем через A прямую h , параллельную прямой 2-3. Прямая h горизонтальна, принадлежит плоскости Σ и пересекает данную прямую m в точке I , то есть является искомой горизонталью. Задача решена “методом 3D”. Решение будет выглядеть на экране компьютера так, как показано на рис. 14.8, б.

Решение задачи в 3D-пространстве получилось немного сложнее, чем на обычном 2D-чертеже. Разумеется, в каждом из решений (2D и 3D) использованы одни и те же правила и закономерности, которые изучаются в курсе начертательной геометрии.

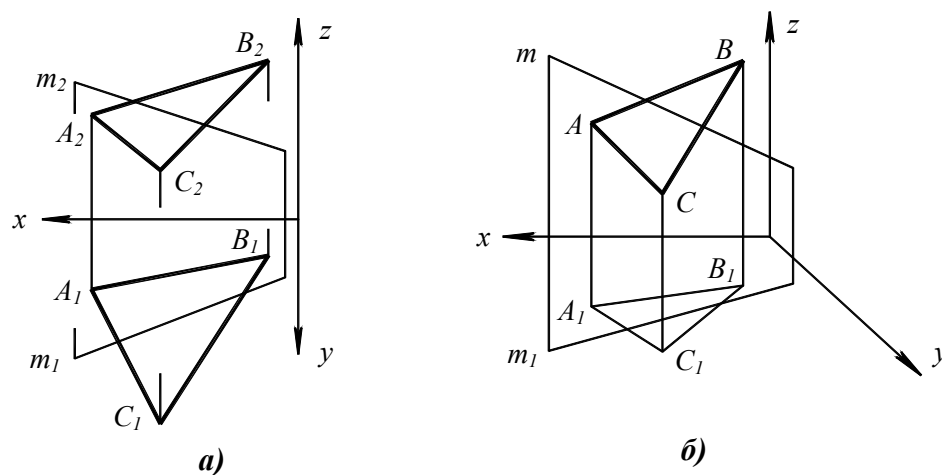


Рис. 14.9

Задача 2. Построить точку пересечения плоскости $\Delta(ABC)$ и прямой m общего положения (рис. 14.9). Сравним алгоритмы решения этой задачи при использовании двух-проекционного 2D-чертежа и 3D-компьютерного моделирования.

На рис. 14.9, а дан чертеж треугольника ABC и прямой m . На рис. 14.9, б показано, как эти фигуры (вместе со своими горизонтальными проекциями) выглядят в виртуальном трехмерном пространстве на экране компьютера. Требуется построить точку M пересечения прямой m с плоскостью треугольника ABC .

Для решения задачи на чертеже (методом 2D) надо через m провести какую-либо вспомогательную секущую плоскость (например, горизонтально-проецирующую плоскость Σ), построить линию пересечения этой плоскости с плоскостью треугольника ($\Sigma \cap \Delta = l-2$) и отметить искомую точку $M = m \cap (l-2)$. Решение показано на рис. 14.10, а.

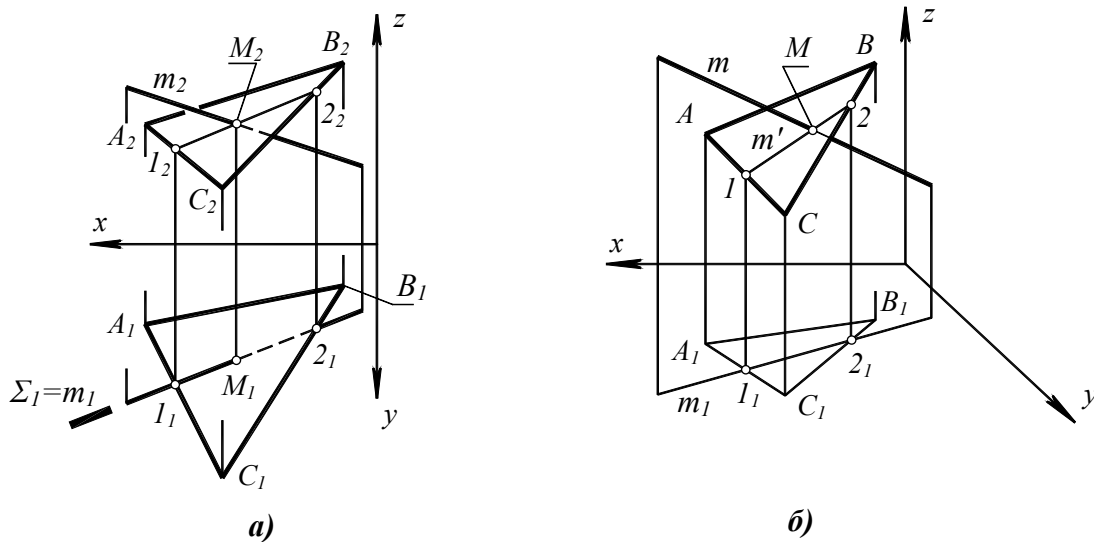


Рис. 14.10

Для решения этой задачи методом 3D в виртуальном трехмерном пространстве компьютера также применяется операция проецирования (рис. 14.10, б).

Находим проекцию m' прямой m на плоскость треугольника ABC и отмечаем точку пересечения $M = m' \cap m$. Эта точка является искомой, поскольку принадлежит как прямой m , так и плоскости $\Delta(ABC)$. Как уже отмечалось, построение проекции любой геометрической фигуры на любую плоскость не вызывает затруднений, поскольку в каждой графической программе обязательно предусмотрена такая возможность.

При проецировании прямой m на плоскость треугольника ABC можно совершенно произвольно выбирать направление проецирования. Например, на рис. 14.10, б направление проецирования выбрано перпендикулярно горизонтальной плоскости $\Pi_1 = xy$. При этом прямая m проецируется на Π_1 в прямую $m_1 = l_1-2_1$, а на плоскость ABC в прямую $m' = l-2$. Искомая точка M находится на пересечении прямой m и ее проекции $l-2$.

Направление проецирования можно выбрать иначе. Например, можно построить ортогональную проекцию прямой m на плоскость треугольника ABC (п. 4.4, задача 5). В этом случае количество вспомогательных 3D-построений незначительно сократится (не надо будет строить горизонтальную проекцию $A_1B_1C_1$ треугольника ABC). Но потребность в операции проецирования обязательно сохраняется.

Вывод. Проецирование геометрических фигур на плоскость является основным “инструментом” при решении позиционных задач, как в начертательной геометрии, так и в компьютерном 3D-моделировании.

14.5.2. Метрические задачи

Метрической задачей называют либо определение истинных размеров фигуры, либо построение фигуры по заранее заданным линейным и угловым размерам. Например,

в начертательной геометрии рассматривают метрические задачи на построение взаимно перпендикулярных прямых и плоскостей (лекция 4).

На проекционном чертеже размеры фигур искажаются. Длина проекции отрезка прямой общего положения меньше его истинной длины. Угловые размеры проекций также отличаются от истинных угловых размеров фигуры. Поэтому в 2D-графике возникают метрические задачи.

В 3D-пространстве компьютерной графической программы можно безо всяких затруднений “чертить по воздуху”. Компьютер – это безупречно точный электронный кульман, позволяющий выполнять 3D-построения строго по заданным размерам. Поэтому в 3D-моделировании нет метрических задач, подобных тем, которые есть в 2D-графике.

Для построения фигуры по заданному размеру надо просто задать этот размер с помощью клавиатуры компьютера. Для определения длины отрезка или длины кривой линии достаточно вызвать команду “справка”, которая предоставит полную информацию о метрических свойствах любого геометрического объекта. Для построения перпендикуляра надо включить объектную привязку “перпендикуляр”.

Вывод. Компьютер – точный электронный 3D-кульман. Метрические задачи, связанные с искажением линейных и угловых размеров при отображении пространства на плоскость, в 3D-графике вообще не возникают. Виртуальная трехмерная модель геометрической фигуры – это геометрически точный “цифровой макет” объемной фигуры, выполненный строго по заданным размерам. Именно поэтому трехмерная графика стала одним из основных инструментов конструктора.

14.5.3. Комбинированные (комплексные) задачи

Задачи, в которых на искомый элемент наложены два или более условий, называются комбинированными (комплексными). Комбинированная задача решается в следующем порядке (см. лекцию 12):

1. *Анализ* – выявление условий, наложенных на искомый элемент, и тех фигур (множеств), которые удовлетворяют этим условиям.
2. *Исследование* – определение количества решений задачи.
3. *Составление алгоритма* (алгоритм – символическая запись последовательности решения задачи).
4. *Построение* – графическая реализация алгоритма на чертеже.

Первые три действия (анализ, исследование, составление алгоритма) совершенно не зависят от того, какой вид графики (2D или 3D) мы будем использовать для последующих графических построений.

Графические построения могут выполняться либо на проекционном чертеже, либо в виртуальном компьютерном пространстве. Выбор зависит от условий рассматриваемой задачи. Одни построения удобно выполнять средствами 3D-графики, другие – с помощью чертежа.

Например, построение горизонтали в плоскости общего положения (см. рис. 14.8) гораздо проще реализовать на двухпроекционном чертеже, чем на 3D-макете. Если же в ходе решения задачи надо выполнять метрические построения (строить перпендикуляры, откладывать отрезки заданной длины и др.), то целесообразно использовать 3D-графику.

Можно сказать, что решение комплексной геометрической задачи происходит не в 2D и не в 3D, а совсем в другом пространстве – в голове учащегося. Это означает, что в первую очередь необходимо правильно понять условие задачи и наметить путь ее решения, составить анализ и записать алгоритм. Только после этого следует выбирать

наиболее удобный вариант решения (2D или 3D) и приступить к выполнению графических построений. В качестве примера рассмотрим два варианта решения (2D и 3D) типовой комбинированной задачи.

Задача. Через точку M провести прямую t , пересекающую скрещивающиеся прямые a и b (рис. 14.11).

На рис. 14.11, *а* представлены исходные геометрические фигуры (прямые a , b и точка A) на обычном двухпроекционном чертеже. На рис. 14.11, *б* показано, как данные фигуры (вместе со своими горизонтальными проекциями) выглядят в виртуальном трехмерном пространстве на экране компьютера.

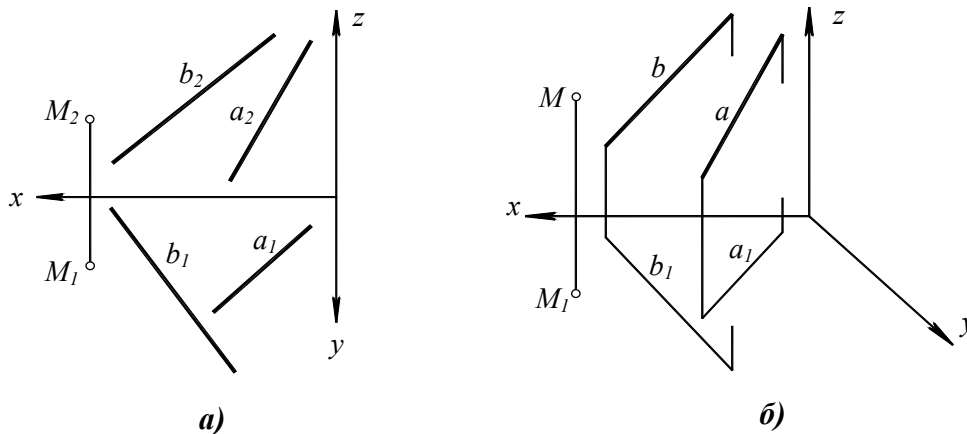


Рис. 14.11

Эта задача была подробно рассмотрена в лекции 12 (п. 12.3, задача 2). Напомним схему ее решения.

1. Множество прямых, проходящих через точку M и пересекающих прямую a , образует плоскость $\Delta(M, a)$.

2. Множество прямых, проходящих через точку M и пересекающих прямую b , образует плоскость $\Sigma(M, b)$.

3. Искомая прямая t , проходящая через точку M и пересекающая одновременно обе данные прямые a и b , должна находиться одновременно в плоскостях Δ и Σ . Поэтому прямая t является линией пересечения плоскостей Δ и Σ .

Для решения задачи на двухпроекционном чертеже (рис. 14.12, *а*) не обязательно находить линию пересечения плоскостей Δ и Σ . Достаточно построить точку B пересечения прямой b с плоскостью $\Delta(M, a)$. Искомая прямая t проходит через точки M и B . Чтобы на 2D-чертеже построить точку B , в плоскости $\Delta(M, a)$ дополнительно проведены отрезки MK и MT , где точки K и T – произвольные точки на прямой a . В соответствии с алгоритмом решения первой позиционной задачи (см. лекцию 3), проводим через прямую b секущую плоскость Θ , строим линию разреза $1-2$, отмечаем точку $B=b \cap (1-2)$ и проводим искомую прямую $t=MB$. Задача решена в варианте 2D.

Чтобы решить эту же задачу в 3D-пространстве (рис. 14.12, *б*), надо точно так же, как и на 2D-чертеже, построить точку B пересечения прямой b с плоскостью $\Delta(M, a)$, после чего провести искомую прямую t через точку M и точку B . Чтобы на 3D-модели построить точку $B=b \cap \Delta(M, a)$, проецируем прямую b на плоскость $\Delta(M, a)$ и отмечаем искомую точку B на пересечении прямой b с ее проекцией.

точный 3D-кульман, а затем вызвать команду “объединить”. Линия пересечения будет построена автоматически, без участия конструктора.

Для проверки полученного решения могут использоваться методы начертательной геометрии, одинаково пригодные как в 2D, так и в 3D-графике.

Пусть, например, надо построить линию пересечения поверхностей кругового конуса и сферы (рис. 14.13, а). Решение этой задачи на обычном двухпроекционном чертеже было подробно рассмотрено в лекции 8 (см. рис. 8.7). Построим линию пересечения конуса и сферы с помощью средств 3D-моделирования.

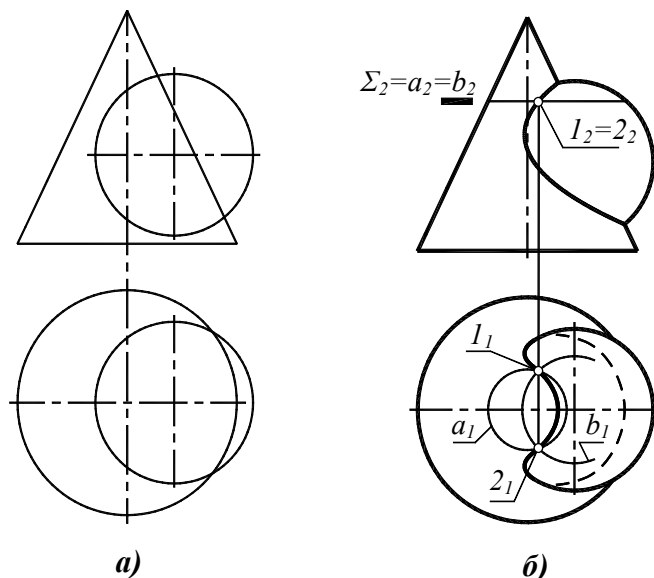


Рис. 14.13

Создаем макеты конуса и сферы в 3D-пространстве (на компьютере) и применяем команду “объединить”. В 3D-пространстве возникает наглядное трехмерное изображение пересекающихся между собой сферы и конуса. На экране компьютера хорошо видна линия пересечения поверхностей – замкнутая пространственная алгебраическая кривая четвертого порядка.

Для проверки точности ее построения могут использоваться методы начертательной геометрии. Найдем ортогональные проекции данных пересекающихся фигур на горизонтальную xy и фронтальную xz плоскости проекций. Как уже упоминалось, в каждой графической программе обязательно предусмотрена возможность проецирования геометрических фигур на любую плоскость, поэтому построение проекций не вызывает затруднений.

После построения проекций получаем двухпроекционный чертеж, показанный на рис. 14.13, б. Проводим вспомогательную секущую плоскость Σ . Находим линии a , b (окружности), которые получаются в пересечении конуса и сферы плоскостью Σ . Отмечая точки пересечения 1 , 2 линий a и b , убеждаемся, что эти точки совершенно точно попадают на линию пересечения, построенную компьютером.

Вывод. Компьютер дает возможность автоматизировать решение некоторых задач начертательной геометрии, в частности – задач на построение линии пересечения поверхностей. Автоматическое решение, полученное на компьютере, позволяет наглядно увидеть линию пересечения. Это решение может использоваться как “подсказка” при самостоятельном (не автоматическом) построении линии пересечения данных поверхностей для тех случаев, когда недостаток пространственного воображения затрудняет решение задачи.

14.6. Кривые линии на экране компьютера

Основным “инструментом” построения любых изображений (рисунков, чертежей, схем, графиков и пр.) является линия – прямая или кривая, закономерная или незакономерная. Понятие “линия” и типы линий были рассмотрены в лекции 6. Напомним, что если линия целиком лежит в плоскости, то ее называют *плоской кривой*. В п. 14.6 рассматриваются только плоские кривые.

В начертательной геометрии для решения задач стараются использовать графически простые линии – прямые и окружности. Эти линии вычерчивают с помощью линейки и циркуля. Решение какой-нибудь геометрической задачи, выполненное с использованием только линейки и циркуля, называют *геометрически точным*.

В трехмерной компьютерной графике линия также используется как основной инструмент геометрического моделирования. Например, для построения 3D-макета детали вычерчивается ее характерный *плоский контур*, а затем из этого контура с помощью команд “вращать” или “выдавить” формируется объемный макет. Так гончар лепит из глины кувшин, вращая заготовку на гончарном круге, а кулинар выдавливает крем на торт из специального кулинарного шприца. Форма кремового украшения совпадает с контуром отверстия в шприце.

Простейшие линии, за исключением прямой – это алгебраические кривые второго порядка: гипербола, парабола и эллипс (в частности – окружность).

14.6.1. Кривые второго порядка

Еще в древней Греции было известно (3 век до нашей эры), что в сечении кругового конуса плоскостью возникают кривые второго порядка. За два с лишним тысячелетия теория кривых второго порядка приобрела законченную форму. Для точного вычерчивания кривых второго порядка было изобретено множество разнообразных механических устройств (эллипсографы, параболические циркули и др.). С развитием средств компьютерной графики стало возможным вычерчивать кривые второго порядка, проходящие через заданные точки или имеющие заданные касательные [16].

Как известно (см. лекцию 6), кривая второго порядка вполне определена своими пятью точками. Через пять точек проходит единственная кривая второго порядка (так же, как через две точки проходит единственная прямая линия). Произвольно укажем на экране компьютера пять компланарных (то есть лежащих в одной плоскости) точек.

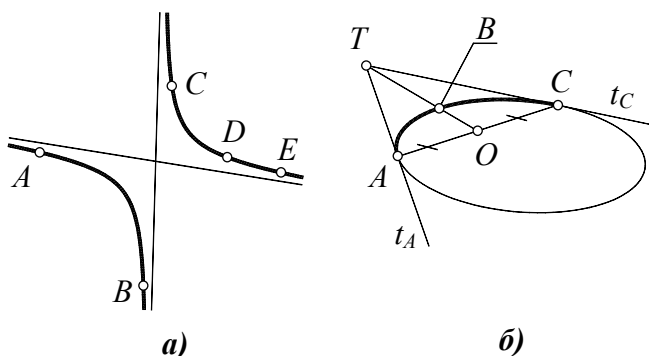


Рис. 14.14

Компьютер вычертит кривую второго порядка, проходящую через эти точки. Например, если даны точки A, B, C, D, E (рис. 14.14, а), то компьютер начертит гиперболу, проходящую через эти точки. Кроме гиперболы, будут начерчены ее асимптоты.

Кривая второго порядка может быть задана не только пятью точками, но и “набором” n точек и m касательных ($n+m=5$). Например, в технических задачах применяют *способ инженерного дискриминанта*, когда

дугу кривой второго порядка задают тремя точками A, B, C и касательными t_A, t_C в конечных точках A, C дуги (рис. 14.14, б). Величину $d=|OB|:|OT|$ называют инженерным дискриминантом (здесь $T=t_A \cap t_C$, а точка O – середина хорды AC). Если величина дис-

криминанта d больше $0,5$, получаем дугу гиперболы, если $d=0,5$ – дугу параболы. Если d меньше $0,5$, то получаем дугу эллипса, как показано на рис. 14.14, б.

Вывод. Компьютер позволяет вычерчивать кривую второго порядка, проходящую через данные точки и имеющую заданные касательные, так же точно, как и прямую, проходящую через две произвольные точки. Это существенно расширяет возможности графического решения геометрических задач. Благодаря применению компьютерной графики, кривые второго порядка стали такими же графически простыми и легко вычерчиваемыми кривыми, как прямая линия и окружность.

14.6.2. Кубическая парабола

Если проектируемый технический объект содержит поверхность сложной формы (обшивка самолета, кузов автомобиля), то линии, образующие эту поверхность, не удастся составить из простейших линий (прямых и кривых второго порядка). Более удобным геометрическим “инструментом” оказалась кубическая парабола (кривая третьего порядка), форма которой описывается каноническим уравнением $y=ax^3+bx^2+cx+d$.

Если в системе координат $xу$ “каноническую” параболу переместить и повернуть, то ее форма, определяемая коэффициентами a, b, c, d , не изменится, но уравнение кубической параболы утратит канонический вид и запишется в неявном виде $f(x, y)=0$, содержащем δ независимых коэффициентов. Посредством изменения этих коэффициентов можно “управлять” как формой параболы, так и ее положением на плоскости $xу$. Таким образом, кубическая парабола более “подвижна”, чем кривая второго порядка, которой можно управлять путем изменения лишь пяти независимых коэффициентов.

Для практического применения кубической параболы ее уравнение записывают в так называемой параметрической форме: $x=a_3t^3+a_2t^2+a_1t+a_0$; $y=b_3t^3+b_2t^2+b_1t+b_0$. Каждому значению параметра t отвечает точка (x, y) . Можно доказать, что получаемое таким образом однопараметрическое множество точек (x, y) образует на плоскости $xу$ кубическую параболу $f(x, y)=0$, уравнение которой всегда возможно преобразовать к каноническому виду (переносом и поворотом системы координат $xу$).

Параметризованное описание кубической параболы содержит два уравнения, которые кратко записывают в виде одного векторного уравнения:

$$\mathbf{r}(t)=\mathbf{a}_3t^3+\mathbf{a}_2t^2+\mathbf{a}_1t+\mathbf{a}_0, \quad (14.1)$$

где $\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_0$ – векторы с компонентами $a_i, b_i (i=1, 2, 3)$, а вектор \mathbf{r} – радиус-вектор точки, “бегущей” по параболе. Например, вектор \mathbf{a}_3 составлен из двух векторов $a_3\mathbf{i}$ и $b_3\mathbf{j}$, где \mathbf{i} и \mathbf{j} – единичные векторы (орты) по осям x, y . Обычно рассматривают сегмент параболы, получающийся при изменении параметра t от 0 до 1 .

Параметрическое уравнение (14.1) называют уравнением кубической параболы в форме Фергюсона [14]. Из этого уравнения получают уравнение кубической параболы в различных формах: в форме Эрмита, в форме Безье и др.

Кубическая парабола в форме Эрмита

Пусть требуется провести кубическую параболу, проходящую через точки A, B и имеющую в этих точках заданные значения производных $\dot{\mathbf{r}}_A=\mathbf{Q}_A, \dot{\mathbf{r}}_B=\mathbf{Q}_B$ (рис. 14.15). Уравнение (14.1) параболы записано в векторной форме, поэтому производная $\dot{\mathbf{r}}$ векторной функции \mathbf{r} по параметру t – векторная величина, характеризующаяся, как и любой вектор, величиной и направлением. При увеличении модуля вектора \mathbf{Q}_A кубическая парабола все теснее примыкает к направлению этого вектора (см. рис. 14.15). Кубическую

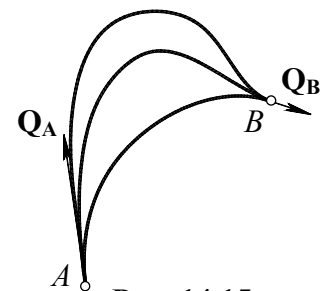


Рис. 14.15

параболу, построенную по заданным точкам A, B и векторным производным $\mathbf{Q}_A, \mathbf{Q}_B$ в этих точках, называют *кубической кривой Эрмита* (по аналогии с интерполяционным полиномом Эрмита, для расчета коэффициентов которого также используются не только значения функции в данных точках, но и значения ее производных в этих точках).

Если касательные к конструируемой кривой в ее конечных точках зафиксированы (заданы направления векторов $\mathbf{Q}_A, \mathbf{Q}_B$), то управление формой кривой Эрмита производится за счет изменения модулей этих двух векторов. В результате получаем *двупараметрическое множество* кубических парабол разной “полноты”, проходящих через данные точки A, B и касающихся данных прямых $\mathbf{Q}_A, \mathbf{Q}_B$ (см. рис. 14.15).

Заметим для сравнения, что кривые второго порядка, удовлетворяющие этим же условиям (касание двух данных прямых в данных точках), образуют *однопараметрическое множество* (параметр – величина инженерного дискриминанта d).

Кубическая парабола в форме Безье

Если записать уравнение кубической параболы не в форме Фергюсона, а в виде

$$\mathbf{r}(t) = t^3 \mathbf{a}_3 + 3t^2(1-t) \mathbf{a}_2 + 3t(1-t)^2 \mathbf{a}_1 + (1-t)^3 \mathbf{a}_0, \quad (14.2)$$

то векторные коэффициенты \mathbf{a}_i приобретают наглядный геометрический смысл. Действительно, при $t=0$ получаем $\mathbf{r}(0) = \mathbf{a}_0$, то есть вектор \mathbf{a}_0 определяет положение начальной точки сегмента параболы. При $t=1$ имеем $\mathbf{r}(1) = \mathbf{a}_3$, то есть векторный коэффициент \mathbf{a}_3 указывает положение конечной точки сегмента параболы. Векторная производная $\dot{\mathbf{r}}(0)$ в начальной точке моделируемого сегмента равна $\dot{\mathbf{r}}(0) = 3(\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_0)$, в конечной точке сегмента равна $\dot{\mathbf{r}}(1) = 3(\mathbf{a}_3 - \mathbf{a}_2)$.

Зададим на плоскости четыре произвольных радиус-вектора $\mathbf{a}_0, \dots, \mathbf{a}_3$ и отметим соответствующие им точки A_0, A_1, A_2, A_3 , образующие *характеристическую ломаную*. Парабола (14.2) пройдет через точки A_0, A_3 и коснется сторон A_0A_1 и A_2A_3 характеристической ломаной (рис. 14.16). Векторная производная $\dot{\mathbf{r}}(t)$ функции $\mathbf{r}(t)$ в точке A_0 совпадает по направлению с A_0A_1 , причем модуль производной равен утроенному расстоянию между точками A_0 и A_1 . В точке A_3 векторная производная совпадает с направлением стороны A_3A_2 , а ее модуль равен утроенному расстоянию между точками A_3 и A_2 .

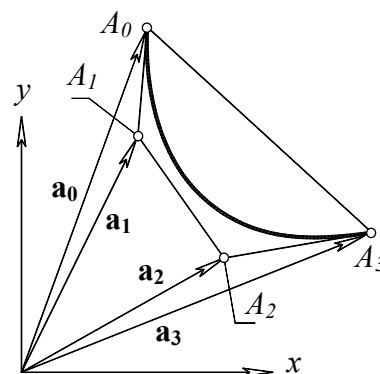


Рис. 14.16

Таким образом, чтобы построить кривую, задаем точки A_0, A_3 , через которые должна проходить наша кривая, а также задаем в этих точках желаемые касательные. На желаемых касательных указываем точки A_1 и A_2 . Увеличивая одновременно длины отрезков A_0A_1 и A_3A_2 , мы придаем конструируемому сегменту кубической параболы увеличенную “полноту”. Если же увеличивать только один из отрезков, например, A_0A_1 , то кривая пойдет ближе к касательной A_0A_1 , и форма кривой будет меняться так же, как она изменялась на рис. 14.15 при увеличении вектора \mathbf{Q}_A .

Описание сегмента кубической параболы уравнением вида (14.2) и ее геометрическое формирование с помощью характеристической ломаной называют *кубической кривой в форме Безье* [14]. Кривая Безье по существу не отличается от ранее рассмотренной кривой Эрмита. Действительно, при построении кривой Эрмита мы управляли ее формой, изменяя направления и модули касательных векторов (векторных производных) в граничных точках кривой (см. рис. 14.15). При управлении формой кривой Безье мы тоже изменяем касательные векторы, но не напрямую, а посредством изменения положения вершин A_1, A_2 характеристической ломаной.

14.6.3. Сплаины

В геометрии линия является очень важным понятием. До появления компьютерной графики использовалось множество механических инструментов для вычерчивания различных кривых. Одним из таких инструментов было универсальное лекало – гибкая металлическая линейка, которую использовали чертежники для соединения отдельных точек на чертеже. Эту линейку называют *сплайн* (от английского *spline* – гибкая металлическая линейка).

В связи с развитием компьютерной графики отпала потребность использовать гибкую линейку. Процедура построения гладкой кривой линии, проходящей через заданные точки, автоматизирована. Сплайном стали называть гладкую кривую линию, составленную из “кусочков” алгебраических кривых.

Понятие “гладкая кривая” имеет точный математический смысл. Составную кривую называют кривой первого порядка гладкости, если ее смежные составляющие имеют в стыковых точках общую касательную. Если же в точках стыка не только имеется общая касательная, но смежные составляющие имеют в стыковых точках общий радиус кривизны, то говорят, что составная кривая имеет второй порядок гладкости.

Наибольшее применение в задачах геометрического моделирования нашли так называемые *кубические сплайны*.

Определение. *Кубический сплайн на плоскости – составная кривая линия, состоящая из дуг кубических парабол $y = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$, проходящая через заданные стыковые точки (узлы) и имеющая в узлах гладкость второго порядка [14].*

В любой графической программе обязательно есть команда “начертить сплайн”, то есть провести кусочно-гладкую кривую через указанные точки.

14.6.4. Построение обводов

В некоторых технических задачах требуется построить (сконструировать) составную линию, проходящую через данные точки и удовлетворяющую при этом каким-либо дополнительным геометрическим условиям (заданный порядок гладкости в стыковых точках, касание какой-либо прямой, величина кривизны в какой-нибудь из заданных точек и др.). Такую кривую называют *обводом*.

Определение. *Обвод – линия, составленная из дуг кривых выбранного вида, которые в стыковых точках имеют определенный порядок гладкости [6].*

Обвод из дуг кривых второго порядка

Пусть требуется построить выпукло-вогнутый обвод из дуг кривых второго порядка, проходящий через точки A, B, C, D и касающийся ломаной линии $AT_1T_2T_3D$ (рис.

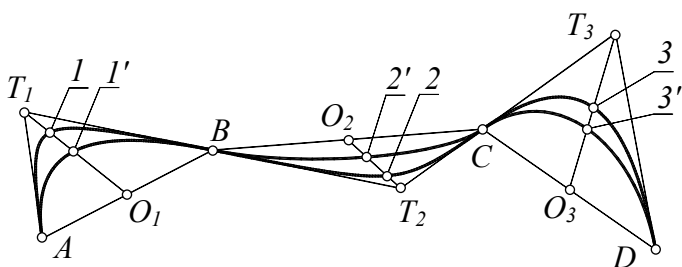


Рис. 14.17

14.17). Используя способ инженерного дискриминанта, на каждом участке конструируемого обвода указываем управляющие точки $1, 2, 3$ и с помощью программного средства [16] вычерчиваем дуги кривых второго порядка. На рис. 14.17 показаны два варианта конструируемого

обвода, участки которого отличаются положением управляющих точек, то есть величиной инженерного дискриминанта (см. п. 14.6.1).

Оба варианта обвода проходят через заданные точки, касаются заданной ломаной линии и имеют в стыковых точках гладкость первого порядка.

Заметим, что с помощью дуг кривых второго порядка невозможно сконструировать выпукло-вогнутый обвод с плавным изменением кривизны, так как в точках перегиба B, C кривизна должна равняться нулю. Кривые второго порядка не имеют точек с нулевой кривизной, поэтому в точках перегиба вектор кривизны стыкуемых дуг кривых второго порядка скачком меняется как по величине, так и по направлению.

Сплайн-интерполяция

В математике интерполяцией называют процедуру определения промежуточных значений какой-либо величины по известным ее значениям в некоторых узловых точках. Геометрически это означает, что через заданные узловые точки проводят плавную кривую. Если для этого используется сплайн, то такое построение называют сплайн-интерполяцией.

Пусть требуется построить обвод второго порядка гладкости, проходящий через заданные точки (узлы) A, B, C, D и касающийся характеристической ломаной $AT_1T_2T_3D$ в граничных точках A и D . Указанным условиям удовлетворяет кубический сплайн (рис. 14.18). Сплайн состоит из дуг AB, BC, CD кубических парабол, стыкующихся между собой с гладкостью второго порядка.

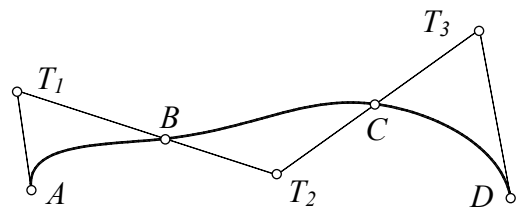


Рис. 14.18

В конструкции кубического сплайна не предусмотрена возможность управления углами наклона касательных к сплайну в его “внутренних” точках. Поэтому с помощью кубического сплайна не удастся получить обвод, касающийся характеристической ломаной во внутренних узловых точках B и C . Касание обеспечивается только в граничных точках A и D (см. рис. 14.18).

Обвод из сегментов кубических парабол в форме Безье

Пусть требуется построить обвод первого порядка гладкости из сегментов кубических парабол, проходящий через узловые точки A, B, C, D и имеющий в этих точках заданные касательные t_A, t_B, t_C, t_D . Для решения задачи указываем управляющие точки 1-2, 3-4, 5-6, лежащие на данных касательных (рис. 14.19).

Рассмотрим участок AB . В соответствии с уравнением (14.2), характеристическая ломаная $A12B$ полностью определяет сегмент AB кубической параболы. Перемещая точки 1 и 2 вдоль заданных касательных t_A, t_B , можно управлять формой этого сегмента.

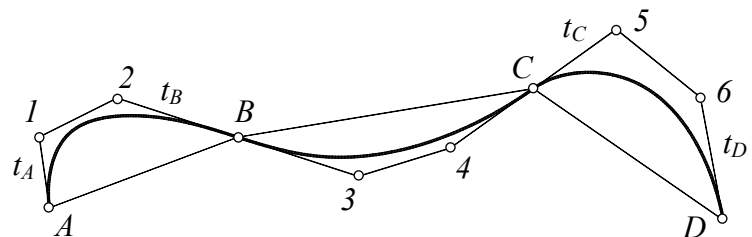


Рис. 14.19

Точно так же, перемещая точки 3, 4 вдоль касательных t_B и t_C , а точки 5, 6 – вдоль касательных t_C и t_D , можно управлять формой кубических сегментов BC и CD .

Кривые Безье позволяют сконструировать обвод не только первого, но и второго порядка гладкости. Для этого надо обеспечить одинаковую кривизну сегментов в точ-

ках стыка, что достигается специальным выбором положения управляющих точек. Действительно, при перемещении управляющих точек A_1, A_2 меняется не только форма всего сегмента, но и его кривизна в конечных точках (см. рис. 14.16). Можно рассчитать требуемое положение управляющих точек соседних сегментов из условия равенства кривизны в точках стыка.

Заметим, что такой расчет возможен не всегда. Например, на рис. 14.19 показан обвод, где стыковые точки B и C являются точками перегиба. Для обеспечения второго порядка гладкости кривизна соединяемых сегментов в этих точках должна быть равна нулю, то есть кубический сегмент BC должен иметь нулевую кривизну в своих конечных точках. Но такое условие невозможно обеспечить, поскольку кубическая парабола имеет единственную точку с нулевой кривизной (точку перегиба). В этом случае сегмент BC разбивают на два “подсегмента”, введя дополнительную узловую точку, в которой не требуется обеспечивать нулевую кривизну стыкующихся “подсегментов”.

Вывод. *Компьютерная графика предоставляет замечательно разнообразные средства и методы конструирования гладких кривых линий. В основе этих методов лежит параметрический способ задания кривых, позволяющий избавиться от “привязки” к декартовой системе координат и придать геометрический смысл коэффициентам алгебраических уравнений, описывающих конструируемую кривую.*

Вопросы для повторения

1. Что называют компьютерной графикой?
2. Что такое “система автоматизированного проектирования”? Какие программные средства содержатся в САПР?
3. Назвать характерные особенности 3D-графики, отличающей ее от обычной 2D-графики. Что общего между этими видами графики?
4. Используется ли в трехмерной компьютерной графике метод проецирования? Если да, то с какой целью?
5. В чем состоит основное назначение трехмерного компьютерного моделирования?
6. Какие новые возможности в построении кривых линий предоставляет компьютерная графика?