Лекция 12

КОМБИНИРОВАННЫЕ ЗАДАЧИ

Многие задачи начертательной геометрии сводятся к построению фигур (точек, линий, поверхностей), удовлетворяющих определенным позиционным или метрическим условиям. Каждому условию соответствует некоторое множество элементов (точек, линий), которое называют *геометрическим местом* этих элементов. Например, сфера – геометрическое место точек, удаленных от данной точки (центра сферы) на заданное расстояние.

Задачи, в которых на искомый элемент наложены два или более условий, называются комбинированными. Иногда такие задачи называют “комплексными”, имея при этом в виду, что на искомый элемент наложен комплекс (два или более) условий.

Перед тем, как приступать к решению комбинированных задач, необходимо овладеть навыками решения типовых геометрических задач, рассмотренных в предыдущих лекциях. Напомним эти задачи.

1. Построение точки пересечения прямой линии и поверхности (первая позиционная задача).
2. Построение линии пересечения двух поверхностей (вторая позиционная задача).
3. Построение взаимно перпендикулярных прямых и плоскостей.
4. Определение длины отрезка прямой общего положения.
5. Преобразование фигуры общего положения в фигуру частного положения способом замены плоскостей проекций.

12.1. Последовательность решения комбинированной задачи

Геометрическая задача, в которой на искомый элемент наложено несколько (два и более) условий, решается по следующей схеме.

1. Вводятся вспомогательные геометрические фигуры (множества), каждое из которых удовлетворяет одному из условий или группе условий, наложенных на искомый элемент.
2. Искомый элемент определяется как результат пересечения вспомогательных фигур (множеств).

Эта схема реализуется в следующем порядке.

Анализ – выявление условий, наложенных на искомый элемент, и тех фигур (множеств), которые удовлетворяют этим условиям.

Исследование – определение количества решений задачи.

Составление алгоритма (алгоритм – символическая запись последовательности решения задачи).

Построение – графическая реализация алгоритма на чертеже.

Построение – это запись (фиксация) решения на чертеже. Перед тем, как выполнять построение, задачу надо мысленно решить в трехмерном пространстве. Пусть, например, надо через данную точку A провести прямую, параллельную двум данным плоскостям. Представим заданные плоскости, произвольно “висящие” в пространстве. Они пересекаются по некоторой линии m. Любая прямая m', параллельная линии m, будет параллельна обеим плоскостям. Следовательно, для решения задачи достаточно найти линию m пересечения данных плоскостей и через точку A провести искомую прямую параллельно найденной линии.

Задача мысленно решена. Теперь можно приступать к графическим построениям: начертить линию m пересечения данных плоскостей и через точку A провести прямую, параллельную найденной прямой m.

12.2. Геометрические места точек или прямых, удовлетворяющих заданным условиям

Перечислим определения некоторых геометрических мест, встречающихся при решении комбинированных задач.

1. Геометрическое место точек, удаленных от данной точки O на расстояние R, есть поверхность сферы с центром O и радиусом R.
2. Геометрическое место точек, удаленных от данной прямой j на расстояние R, есть поверхность цилиндра вращения с осью j и радиусом R.
3. Геометрическое место точек, удаленных от данной плоскости на заданное расстояние – две плоскости, параллельные данной.
4. Геометрическое место прямых, проходящих через точку S на прямой j и наклоненных к j под постоянным углом – прямолинейные образующие конуса вращения с вершиной S и осью j.
5. Геометрическое место прямых, проходящих через данную точку S и равнонаклоненных к данной плоскости Σ – образующие конуса вращения с вершиной S и осью, перпендикулярной к плоскости Σ.
6. Геометрическое место точек, равноудаленных от двух данных точек A и B, есть плоскость, перпендикулярная отрезку AB и проходящая через его середину (срединная плоскость).
7. Геометрическое место точек, равноудаленных от трех данных точек A, B и C, есть перпендикуляр к плоскости этих точек, проходящий через центр окружности ABC.
8. Геометрическое место точек, равноудаленных от четырех точек A, B, C, D, не лежащих в одной плоскости – точка (центр сферы, проходящей через данные точки A, B, C, D).
9. Геометрическое место точек, равноудаленных от двух пересекающихся плоскостей Σ и Δ – биссекторная плоскость двугранного угла $\Sigma \cap \Delta$.

12.3. Примеры решения комбинированных задач

Задача 1. *Опустить перпендикуляр t из точки M на прямую m.*

Требование “опустить перпендикуляр на прямую” означает, что перпендикуляр к прямой должен с ней пересечься. Эта задача рассматривалась в лекции 4. Решим ее как комбинированную задачу, выполнив анализ, исследование и составив алгоритм.

<u>Анализ</u>

Искомая прямая t должна удовлетворять двум условиям.

Условие 1. Прямая t должна проходить через точку M и быть перпендикулярна к прямой m. Множество прямых, удовлетворяющих этому условию, образует плоскость Σ, проходящую через точку M и перпендикулярную к прямой m. Это условие записывается в символической форме:

$$\{t:(M \in t \perp m)\}=\Sigma.$$

Требования, наложенные на искомый элемент t, отмечены в круглых скобках. Фигурными скобками обозначают множество каких-либо элементов. Поэтому символическая запись читается следующим образом: плоскость Σ образована множеством прямых t, проходящих через точку M и перпендикулярных к прямой m.

Условие 2. Искомая прямая t должна проходить через точку M и пересекать прямую m. Множество прямых, удовлетворяющих этому условию, образует плоскость Δ, проходящую через точку M и прямую m:

$$\{t:(M \in t \cap m)\}=\Delta.$$

Таким образом, искомая прямая t должна одновременно находиться в плоскости Σ (первое условие) и в плоскости Δ (второе условие). Следовательно, прямая t есть линия пересечения плоскостей Σ и Δ: $t=\Sigma \cap \Delta$.

Исследование

Искомая прямая – результат пересечения двух плоскостей. Плоскости общего положения пересекаются по прямой. В общем случае задача имеет единственное решение.

Алгоритм

1. Построение плоскости Σ. Через точку M проводим плоскость Σ, перпендикулярную к данной прямой m. Зададим плоскость Σ горизонталью и фронталью таким образом, чтобы выполнить условия теоремы 2 о перпендикулярности прямой и плоскости. Краткая запись этого действия имеет вид: $M \subset \Sigma(h \cap f) \perp m$.

2. Построение плоскости Δ выполнять не надо, так как плоскость Δ уже задана на чертеже точкой M и прямой m:

$$\Delta(m, M) \text{ – задана.}$$

3. Построение искомой прямой: $t = \Sigma \cap \Delta$.

Графическая реализация

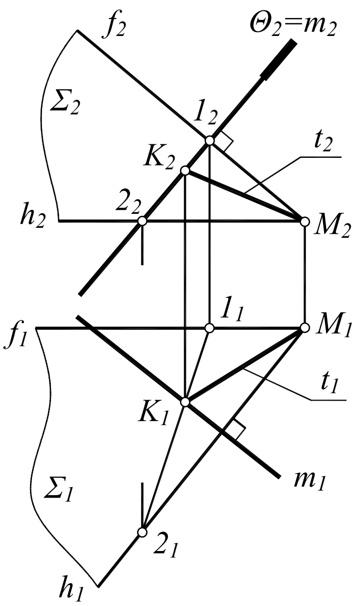

Рис. 12.1

Графическая реализация алгоритма показана на рис. 12.1. Через точку M проведена плоскость $\Sigma(h \cap f)$, перпендикулярная к прямой m. Точка M – общая точка плоскостей Σ и Δ, поэтому для построения линии t их пересечения достаточно найти еще одну общую точку этих плоскостей. Например, на рис. 12.1 найдена точка K пересечения прямой m с плоскостью Σ (по схеме решения первой позиционной задачи). Точка K – общая точка плоскостей Σ и Δ, поэтому прямая $t=MK$ – искомый перпендикуляр, опущенный из точки M на прямую m. Задача решена.

Задача 2. *Через точку M провести прямую m, пересекающую данные скрещивающиеся прямые a и b* (рис. 12.2).

Анализ

Искомая прямая m должна удовлетворять двум условиям.

Условие 1. Прямая m должна проходить через точку M и пересекать прямую a. Множество прямых, удовлетворяющих этому условию, образует плоскость $\Delta(M, a)$. Символическая запись этого условия имеет вид:

$$\{m:(M \in m \cap a)\}=\Delta.$$

Условие 2. Прямая m должна проходить через точку M и пересекать прямую b. Множество прямых, удовлетворяющих этому условию, образует плоскость $\Sigma(M, b)$. Символическая запись этого условия имеет вид:

$$\{m:(M \in m \cap b)\}=\Sigma.$$

Прямая m должна одновременно находиться в плоскости Δ (первое условие) и в плоскости Σ (второе условие). Следовательно, искомая прямая m – линия пересечения плоскостей Δ и Σ: $m=\Delta \cap \Sigma$.

Исследование

Искомая прямая является результатом пересечения двух плоскостей. Две плоскости общего положения пересекаются по одной прямой. Следовательно, в общем случае задача имеет единственное решение.

Алгоритм

1. Построение плоскости Δ выполнять не надо, так как плоскость Δ уже задана на чертеже точкой M и прямой a:

$$\Delta(M, a) \text{ – задана.}$$

2. Построение плоскости Σ выполнять не надо, так как плоскость Σ уже задана на чертеже точкой M и прямой b:

$$\Sigma(M, b) \text{ – задана.}$$

3. Выполняем построение искомой прямой как линии пересечения двух плоскостей:

$$m=\Delta\cap\Sigma.$$

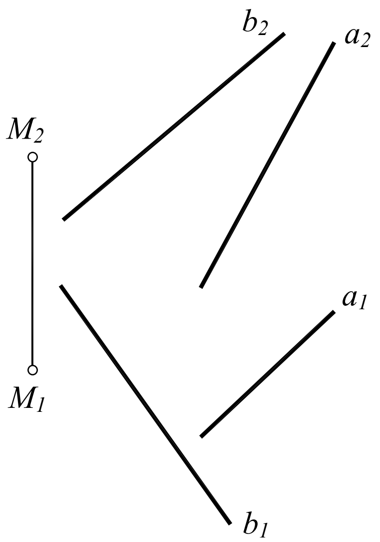

Рис. 12.2

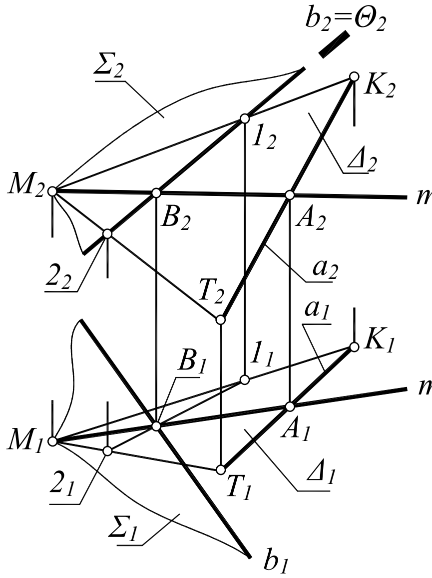

Рис. 12.3

Графическая реализация (рис. 12.3)

Поскольку плоскости $\Delta(M, a)$ и $\Sigma(M, b)$ уже заданы, то для решения задачи достаточно построить линию их пересечения. Одна точка этой линии известна: точка M – общая точка плоскостей Δ и Σ.

В качестве еще одной общей точки плоскостей Δ и Σ можно взять, например, точку B пересечения прямой b с плоскостью Δ. Точка B определяется по алгоритму решения первой позиционной задачи: через b проводим вспомогательную плоскость Θ, строим линию разреза $(1\text{-}2)=\Theta\cap\Delta$ и на пересечении линии разреза с прямой b отмечаем точку B. Искомая прямая m проходит через точку M и пересекает данные прямые a и b в точках A и B (см. рис. 12.3). Для построения линии *1-2* потребовалось начертить в плоскости Δ вспомогательные прямые MT и MK, где T, K – произвольные точки прямой a.

Задача 3. *Построить прямую m, параллельную данной прямой l и пересекающую данные скрещивающиеся прямые a и b* (рис. 12.4).

Условие параллельности прямых m и l означает, что m должна проходить через несобственную точку L^∞ прямой l. Следовательно, задача 3 отличается от ранее рассмотренной задачи 2 только тем, что в задаче 3 искомая прямая должна проходить не через “обычную” точку L, а через несобственную L^∞, заданную на чертеже направлением l.

Анализ

Искомая прямая m должна удовлетворять двум условиям.

Условие 1. Прямая m должна проходить через несобственную точку L^∞ прямой l и пересекать прямую a. Множество прямых, удовлетворяющих этому условию, образует плоскость $\Delta(L^\infty, a)=\Delta(l'\cap a)$, где l' – прямая, параллельная l и пересекающая прямую a (в произвольной точке). Символическая запись этого условия: $\{m:(L^\infty\in m\cap a)\}=\Delta$.

Условие 2. Прямая m должна проходить через точку L^∞ и пересекать прямую b. Множество прямых, удовлетворяющих этому условию, образует плоскость $\Sigma(L^\infty, b)$. Символическая запись этого условия имеет вид: $\{m:(L^\infty \in m \cap b)\}=\Sigma$.

Искомая прямая m должна одновременно находиться в плоскости Δ (первое условие) и в плоскости Σ (второе условие). Следовательно, прямая m – линия пересечения плоскостей Δ и Σ: $m=\Delta\cap\Sigma$.

Исследование

Искомая прямая является результатом пересечения двух плоскостей. Две плоскости общего положения пересекаются по одной прямой. Следовательно, в общем случае задача имеет единственное решение.

Алгоритм

1. Построение плоскости Δ выполнять не надо, так как плоскость Δ уже задана на чертеже точкой L^∞ и прямой a: $\Delta(L^\infty, a)$ – задана.

2. Построение плоскости Σ выполнять не надо, так как плоскость Σ уже задана на чертеже точкой L^∞ и прямой b: $\Sigma(L^\infty, b)$ – задана.

3. Искомая прямая определяется как линия пересечения плоскостей Δ и Σ: $m=\Delta\cap\Sigma$.

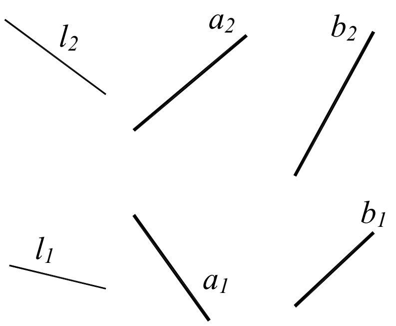

Рис. 12.4

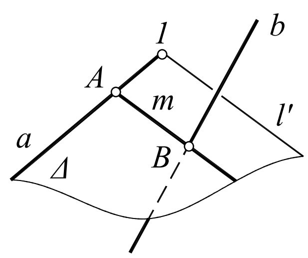

Рис. 12.5

Графическая реализация

Поскольку плоскости $\Delta(L^\infty, a)$ и $\Sigma(L^\infty, b)$ заданы, то для решения задачи достаточно построить линию их пересечения. Одна точка этой линии известна – это несобственная точка L^∞ прямой l, общая для плоскостей Δ и Σ. В качестве еще одной общей точки плоскостей Δ и Σ можно взять, например, точку B пересечения прямой b с плоскостью $\Delta(L^\infty, a)=\Delta(l'\cap a)$. Здесь l' – прямая, параллельная l и пересекающая прямую a в произвольно отмеченной на a точке *1*. Искомая прямая m параллельна l, проходит через B и пересекает прямую a в точке A. На рис. 12.5 дано схематическое решение задачи.

Задача 4. *Определить расстояние между скрещивающимися прямыми a и b.*

Расстояние между скрещивающимися прямыми a, b (см. рис. 12.4) определяется как длина отрезка AB, перпендикулярного к прямым a, b и пересекающего их в точках A и B соответственно.

Схема решения

1. Находим направление l общего перпендикуляра к данным скрещивающимся прямым a, b (это направление определяется как перпендикуляр к плоскости $a\cap b'$, где $b'\|b$).

2. Строим прямую m, параллельную прямой l и пересекающую прямые a, b в точках A, B (точно так же, как это было сделано при решении задачи 3).

3. Каким-либо из известных способов (например, способом прямоугольного треугольника) определяем истинную длину отрезка AB. Задача решена.

Примечание. Задачи 2, 3, 4 несущественно отличаются друг от друга. Во всех этих задачах требуется *найти прямую, проходящую через данную точку (собственную или* *несобственную) и пересекающую две данные прямые.* Как известно (см. п. 6.3.2), условие прохождения прямой через фиксированную точку отнимает у четырехпараметрического (∞^4) множества прямых две степени свободы. Условия пересечения с каждой из данных прямых "связывают" еще две степени свободы. Следовательно, прямая, удовлетворяющая наложенным на нее условиям (инцидентность данной точке и пересечение с двумя данными прямыми), вовсе не имеет степеней свободы: ∞^4-∞^2-∞^2=∞^0. Это означает, что множество таких прямых не бесконечно. Например, в каждой из задач 2, 3, 4 получено единственное решение.

Задача 5. *Через точку M провести прямую l, параллельную плоскости $\Delta(a\cap b)$ и пересекающую прямую m* (рис. 12.6).

Анализ

Искомая прямая l должна удовлетворять двум условиям.

1. Множество прямых l, проходящих через точку M и параллельных плоскости Δ, образует плоскость Δ', параллельную Δ: $\{l:(M\in l \parallel \Delta)\}=\Delta'$.

2. Множество прямых l, проходящих через точку M и пересекающих прямую m, образует плоскость $\Theta(M, m)$: $\{l:(M\in l\cap m)\}=\Theta$.

Искомая прямая определяется как пересечение выявленных множеств: $l=\Delta'\cap\Theta$.

Исследование

Искомая прямая является результатом пересечения плоскостей Θ и Δ'. Если эти плоскости не совпадают и не параллельны, то они пересекаются по одной прямой. В этом случае задача имеет единственное решение.

Алгоритм

1. Через точку M проводим плоскость Δ', параллельную Δ: $M\in\Delta'\parallel\Delta$.
2. Плоскость $\Theta(M, m)$ – задана.
3. Искомая прямая: $l=\Delta'\cap\Theta$.

Графическая реализация (см. рис. 12.6)

Плоскость Δ', проходящая через M и параллельная плоскости Δ, задана прямыми a' и b', параллельными прямым a и b. Определяем линию пересечения плоскостей Δ' и Θ. Точка M – общая точка этих плоскостей. Еще одна общая точка (точка N) найдена по схеме решения первой позиционной задачи как точка пересечения прямой m с плоскостью Δ' (с помощью вспомогательной секущей плоскости Σ, см. рис. 12.4). Прямая $l=MN$ – искомая.

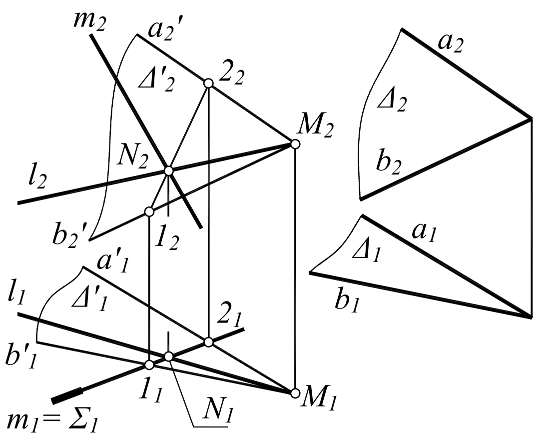

Рис. 12.6

Примечание. Условие параллельности прямой l и плоскости Δ означает, что прямая l пересекается с несобственной прямой плоскости Δ. Иначе говоря, в задаче 5 требуется *найти прямую, проходящую через данную точку и пересекающую две данные прямые, одна из которых несобственная.* Следовательно, задача 5 по существу ничем не отличается от ранее рассмотренных задач 2, 3, 4.

Задача 6. *Через точку A провести прямую l, параллельную плоскостям $\Sigma(m\cap n)$ и $\Delta(c\cap d)$* (рис. 12.7).

Анализ

1. Множество прямых l, проходящих через точку A параллельно плоскости Σ, образует плоскость Σ', параллельную Σ: $\{l:(A\in l\parallel\Sigma)\}=\Sigma'$.

2. Множество прямых l, проходящих через точку A и параллельных плоскости Δ, образует плоскость Δ', параллельную Δ: $\{l:(A\in l||\Delta)\}=\Delta'$. Искомая прямая l: $l=\Sigma'\cap\Delta'$.

Исследование

Искомая прямая является результатом пересечения двух плоскостей. Если эти плоскости не совпадают и не параллельны, то они пересекаются по одной прямой. В этом случае задача имеет единственное решение.

Алгоритм

1. Через A проводим плоскость Σ', параллельную Σ: $A\in\Sigma'||\Sigma$.

2. Через A проводим плоскость Δ', параллельную Δ: $A\in\Delta'||\Delta$.

3. Искомая прямая: $l=\Sigma'\cap\Delta'$.

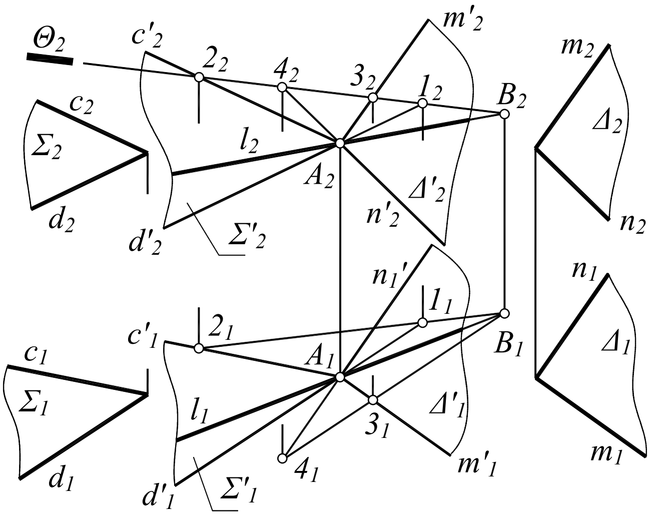

Рис. 12.7

Графическая реализация

Для решения задачи надо через точку A провести плоскости Σ' и Δ', параллельные плоскостям Σ и Δ, затем построить линию l пересечения плоскостей Σ' и Δ'. Точка A – общая точка этих плоскостей. Еще одна общая точка (точка B) найдена с помощью вспомогательной секущей плоскости Θ (см. рис. 12.7). Прямая $l=AB$ – искомая.

Задача 7. *На чертеже задан отрезок ВС и прямая т. Построить равнобедренный треугольник АВС с основанием ВС и вершиной А на прямой т* (рис. 12.8).

Анализ

На положение искомой точки A наложены два условия.

1. Точка A должна располагаться на прямой m. Этому условию отвечают все точки на этой прямой: $\{A:(A\in m)\}=m$.

2. Точка A должна быть равноудалена от точек B и C, так как A – вершина равнобедренного треугольника с основанием BC. Этому условию удовлетворяют точки срединной плоскости Φ, перпендикулярной отрезку AB и проходящей через его середину: $\{A:(|A\text{-}B|=|A\text{-}C|)\}=\Phi$.

Искомая точка: $A=m\cap\Phi$.

Исследование

Искомая точка является результатом пересечения прямой линии с плоскостью. Произвольная прямая и плоскость общего положения пересекаются в одной точке. Следовательно, в общем случае задача имеет единственное решение.

Алгоритм

1. Через середину O отрезка BC проводим плоскость Φ, перпендикулярную BC:

$$O\in\Phi\perp BC.$$

2. Прямая m – задана.

3. Искомая точка: $A=m\cap\Phi$.

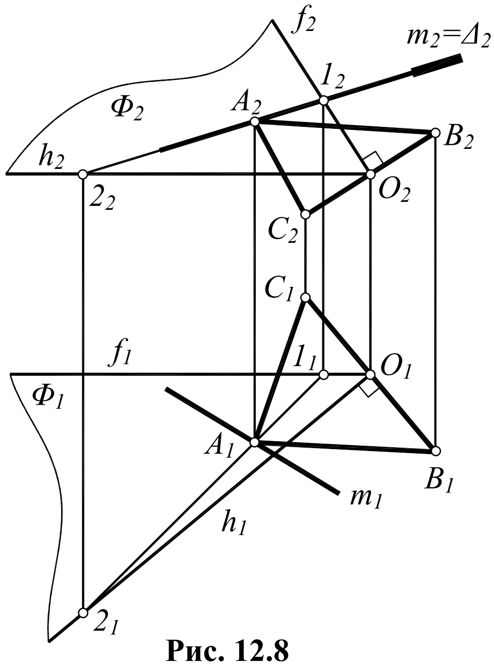

Рис. 12.8

Графическая реализация (см. рис. 12.8)

Через середину O отрезка BC проводим плоскость $\Phi(h\cap f)$, перпендикулярную прямой BC. Затем определяем искомую точку A пересечения прямой m и плоскости Φ (по схеме решения первой позиционной задачи). Задача решена.

Задача 8. *Через точку A провести прямую l, параллельную плоскости $\Gamma(m\cap n)$ и перпендикулярную прямой a* (рис. 12.9).

Анализ

На положение искомой прямой l наложены два условия.

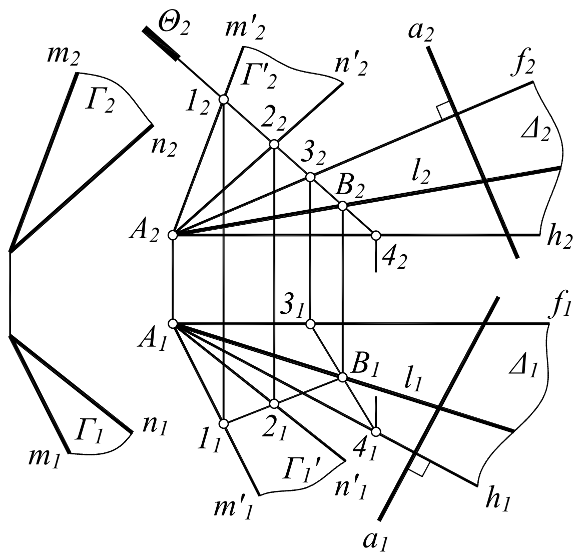

Рис. 12.9

1. Прямая l должна проходить через точку A параллельно плоскости $\Gamma(m\cap n)$. Множество прямых, удовлетворяющих этому условию, образует плоскость Γ', проходящую через точку A и параллельную плоскости Γ: $\{l:(A\in l||\Gamma)\}=\Gamma'$.

2. Прямая l должна проходить через точку A и располагаться перпендикулярно к данной прямой a. Множество прямых, удовлетворяющих этому условию, образует плоскость Δ, проходящую через точку A и перпендикулярную к прямой a:

$$\{l:(A\in l\perp a)\}=\Delta.$$

Искомая прямая находится на пересечении выявленных множеств:

$$l=\Gamma'\cap\Delta.$$

Исследование

Искомая прямая является результатом пересечения двух плоскостей. Если эти плоскости не совпадают и не параллельны, то они пересекаются по одной прямой. В этом случае задача имеет единственное решение.

Алгоритм

1. Через точку A проводим плоскость Γ', параллельную Γ: $A\in\Gamma'||\Gamma$.
2. Через точку A проводим плоскость Δ, перпендикулярную a: $A\in\Delta\perp a$.
3. Искомая прямая: $l=\Gamma'\cap\Delta$.

Графическая реализация (см. рис. 12.9)

Проведем через точку A плоскость Γ', параллельную плоскости Γ, задав ее прямыми m', n', параллельными прямым m, n. Проведем через A еще одну плоскость Δ, перпендикулярную к прямой a, задав ее горизонталью и фронталью в соответствии с условием теоремы 2 о перпендикулярности прямой и плоскости. Точка A – общая точка плоскостей Γ' и Δ. Еще одна общая точка (точка B) найдена с помощью вспомогательной секущей плоскости Θ (по схеме решения второй позиционной задачи). Прямая $l=AB$ – искомая. Задача решена.

Задача 9. *В треугольнике ABC построить геометрическое место точек, равноудаленных от данных точек D и E* (рис. 12.10).

Анализ

На искомое множество точек наложены два условия.

1. Искомое множество X_i должно принадлежать плоскости треугольника $\Gamma(ABC)$.

2. Точки множества X_i должны быть равноудалены от точек D и E. Этому условию удовлетворяют все точки срединной плоскости Θ, проходящей через середину O отрезка DE перпендикулярно к этому отрезку: $\{X_i:(|X_i-D|=|X_i-E|)\}=\Theta$.

Точки, равноудаленные от D и E, находятся на пересечении плоскостей $\Gamma(ABC)$ и Θ. Плоскости пересекаются по прямой, следовательно, искомое множество точек X_i – отрезок прямой линии, ограниченный сторонами треугольника ABC.

<u>Исследование</u>

Искомый элемент – прямая линия, которая является результатом пересечения двух плоскостей. Если эти плоскости не совпадают и не параллельны, то они пересекаются по одной прямой. В этом случае задача имеет единственное решение.

<u>Алгоритм</u>

1. Плоскость $\Gamma(ABC)$ – задана.

2. Через середину O отрезка DE проводим срединную плоскость Θ, перпендикулярную отрезку DE: $O \in \Theta \perp DE$.

3. Искомое множество - отрезок MN линии пересечения плоскостей Γ и Θ, ограниченный сторонами треугольника ABC: $MN=\Gamma \cap \Theta$.

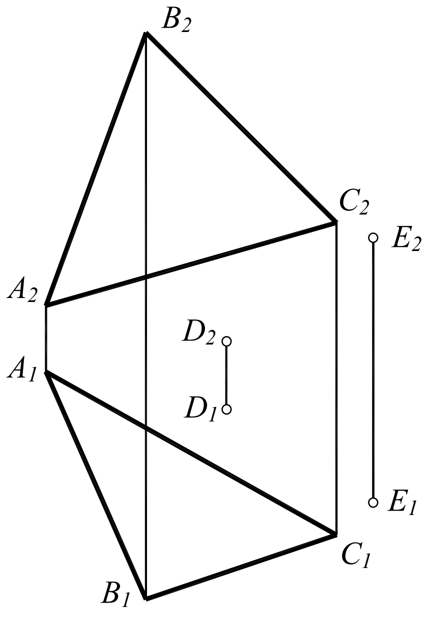

Рис. 12.10

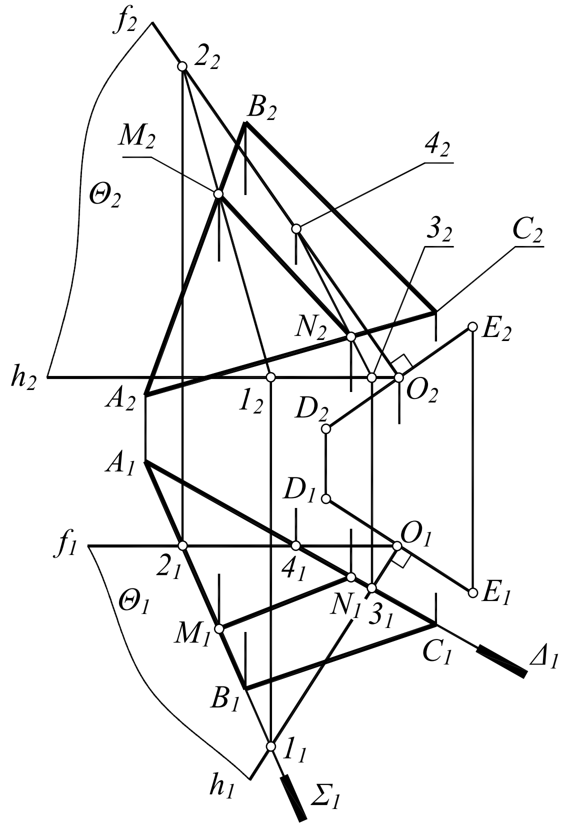

Рис. 12.11

<u>Графическая реализация (рис. 12.11)</u>

Через середину O отрезка DE проводим плоскость Θ, перпендикулярную этому отрезку. Плоскость Θ задана на рис. 12.11 горизонталью и фронталью, перпендикулярными к DE (см. теорему 2 о перпендикулярности прямой и плоскости). Затем с помощью вспомогательных секущих плоскостей Σ и Δ определяем точки M и N пересечения сторон AB и AC треугольника ABC со срединной плоскостью Θ (по схеме решения первой позиционной задачи). Отрезок MN содержит множество точек, равноудаленных от данных точек D и E, и при этом принадлежит плоскости треугольника. Следовательно, MN – искомое геометрическое место точек. Задача решена.

Задача 10. *Построить геометрическое место точек, равноудаленных от данных точек* A, B, C (рис. 12.12).

Анализ

На искомое множество точек X_i наложены три условия (условия равноудаленности от пар точек A-B, B-C и A-C).

1. Условию равноудаленности от точек A и B удовлетворяют все точки плоскости Θ, проходящей через середину O отрезка AB перпендикулярно к этому отрезку:

$$\{X_i : (|X_i - A| = |X_i - B|)\} = \Theta.$$

2. Условию равноудаленности от точек B и C удовлетворяют все точки плоскости Θ', проходящей через середину O' отрезка BC перпендикулярно к этому отрезку:

$$\{X_i : (|X_i - B| = |X_i - C|)\} = \Theta'.$$

3. Условие равноудаленности от точек A и C есть следствие первых двух условий. Действительно, в соответствии с условиями 1 и 2 получаем: $|X_i - A| = |X_i - B|$ и $|X_i - B| = |X_i - C|$. Отсюда следует, что $|X_i - A| = |X_i - C|$. Поэтому для решения задачи достаточно найти множество точек, удовлетворяющих только первым двум условиям, то есть найти линию пересечения плоскостей Θ и Θ'.

Исследование

Искомое множество является результатом пересечения двух плоскостей. Две плоскости пересекаются по одной прямой. Задача имеет единственное решение.

Алгоритм

1. Через середину O отрезка AB проводим плоскость Θ, перпендикулярную отрезку AB: $O \in \Theta \perp AB$.

2. Через середину O' отрезка BC проводим плоскость Θ', перпендикулярную отрезку BC: $O' \in \Theta' \perp BC$.

3. Искомое множество – линия пересечения плоскостей Θ и Θ': $l = \Theta \cap \Theta'$.

Графическая реализация (см. рис. 12.12)

Через середину O отрезка AB проводим плоскость Θ, перпендикулярную отрезку AB. Плоскость Θ задана на рис. 12.12 горизонталью h и фронталью f, перпендикулярными к AB (см. теорему 2 о перпендикулярности прямой и плоскости). Затем через середину O' отрезка BC проводим плоскость Θ', перпендикулярную отрезку BC. Плоскость Θ' задана на рис. 12.12 горизонталью h' и фронталью f'. Требуется построить линию пересечения плоскостей Θ и Θ' (решить вторую позиционную задачу).

С помощью вспомогательных секущих плоскостей Σ и Σ' находим общие точки F и E срединных плоскостей Θ и Θ'. Точка F найдена как точка пересечения горизонтали $h \subset \Theta$ с плоскостью Θ'. Для этого через h проведена секущая плоскость Σ и построена линия разреза $m' = \Sigma \cap \Theta'$, параллельная горизонтали h'. На пересечении линии разреза m' с горизонталью h отмечена точка F. Аналогичным образом, с помощью вспомогательной секущей плоскости Σ' найдена точка $E = h' \cap \Theta$. Для этого построена линия разреза $m = \Sigma' \cap \Theta$ (линия m параллельна горизонтали h). Затем на пересечении линии разреза m с горизонталью h' отмечена точка E. Через точки E и F проходит искомая прямая l, несущая множество точек, равноудаленных от заданных точек A, B, C.

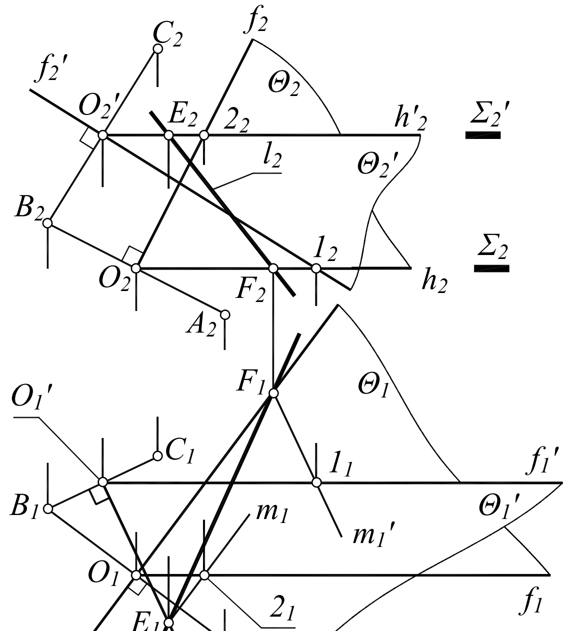

Рис. 12.12

Примечание. Задача может быть решена способом замены плоскостей проекций. Двумя последовательными заменами плоскостей проекций плоскость *ABC* преобразуется в плоскость уровня. Через центр окружности, проходящей через *A*, *B*, *C*, проводим перпендикуляр *l* к плоскости *ABC*. Прямая *l* – искомая, так как содержит множество точек, равноудаленных от данных точек *A*, *B*, *C*.

Задача 11. *Найти множество точек, удаленных от фронтали f на расстояние 20 мм и от точки A – на 25 мм* (рис. 12.13).

Анализ

На искомое множество точек X_i наложены два условия.

1. Условию удаленности от прямой *f* на расстояние *20 мм* удовлетворяют все точки цилиндрической поверхности вращения Θ с осью *f* и радиусом 20 мм:

$$\{X_i :(|X_i - f|=20\ мм)\}=\Theta.$$

2. Условию удаленности от точки *A* на *25 мм* удовлетворяют все точки сферы Φ с центром *A* и радиусом *25 мм*: $\{X_i :(|X_i - A|=25\ мм)\}=\Phi$.

Искомое множество точек X_i находится на пересечении поверхностей цилиндра и сферы.

Исследование

Искомое множество является результатом пересечения двух алгебраических поверхностей второго порядка – цилиндра и сферы. Линия пересечения алгебраических поверхностей второго порядка есть алгебраическая кривая четвертого порядка. Любая точка, принадлежащая этой кривой, удовлетворяет условию задачи.

Алгоритм

Определяем линию пересечения поверхностей сферы и цилиндра, используя схему решения второй позиционной задачи.

Графическая реализация

Преобразуем чертеж так, чтобы цилиндр Θ занял проецирующее положение. С этой целью вместо плоскости Π_1 вводим в рассмотрение плоскость проекций Π_4, перпендикулярную оси *f* цилиндра.

В новой системе координат Π_2/Π_4 находим линию *BDCE* пересечения поверхностей Θ и Φ. Проекция этой линии на плоскости Π_4 совпадает с очерком цилиндра Θ, так как поверхность этого цилиндра занимает проецирующее положение относительно Π_4.

"Возвращаем" линию *BDCE* в исходную систему координат Π_2/Π_1, используя основной инвариант преобразования системы координат: *расстояние любой точки до новой плоскости проекций Π_4 равно расстоянию этой же точки до заменяемой плоскости проекций Π_1*. Дополнительные (промежуточные) точки линии *BDCE* могут быть найдены с помощью вспомогательных секущих плоскостей, параллельных Π_2. Построение промежуточных точек на рис. 12.13 условно не показано.

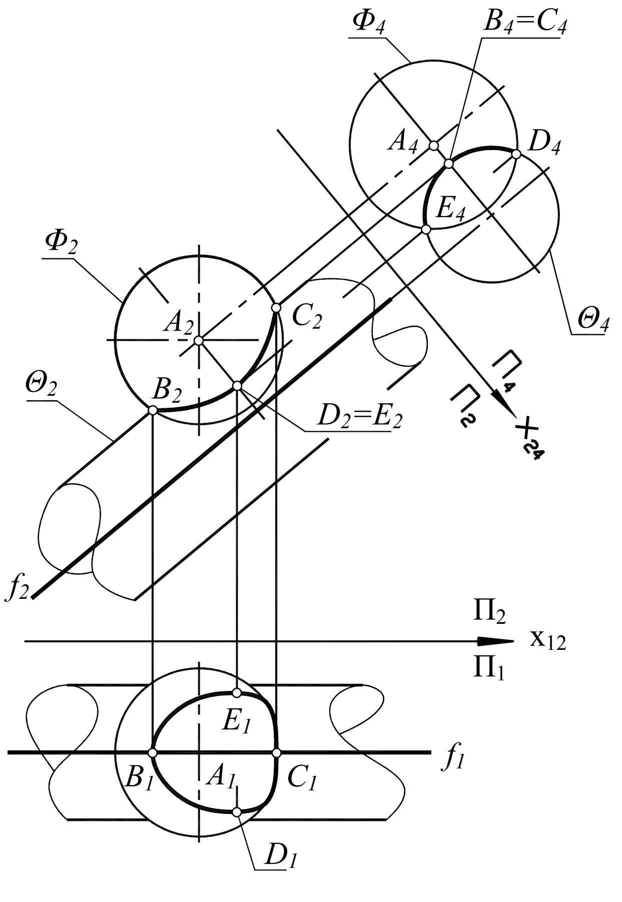

Рис. 12.13

Задача 12. *Построить недостающую проекцию прямой l, параллельной прямой BC, если расстояние между l и BC равно 20 мм* (рис. 12.14).

Анализ

На искомую прямую l наложены два условия.

1. Множество прямых l, фронтальные проекции которых совпадают с заданной проекцией l_2, образуют фронтально-проецирующую плоскость Σ, проекция Σ_2 которой совпадает с фронтальной проекцией прямой l:

$$\{l:(l\rightarrow l_2)\}=\Sigma.$$

2. Множество прямых l, параллельных прямой BC и удаленных от нее на *20 мм*, образуют цилиндр вращения Θ с осью BC и радиусом *20 мм*:

$$\{l:(l||BC,\ |l\text{-}BC|=20\text{ мм})\}=\Theta.$$

Искомая прямая l находится на пересечении цилиндра Θ и плоскости Σ.

Исследование

Искомая прямая является результатом пересечения цилиндра вращения и плоскости Σ, параллельной оси цилиндра. Возможны три случая.

1. Плоскость Σ не пересекается с цилиндром – нет действительных решений.
2. Плоскость Σ пересекает цилиндр – получаем два различных решения.
3. Плоскость Σ касается цилиндра – получаем два совпадающих решения.

Алгоритм

Находим линию l пересечения поверхностей Θ и Σ: $l=\Theta\cap\Sigma$.

Графическая реализация (рис. 12.15)

Предварительно преобразуем чертеж так, чтобы ось BC цилиндра Θ заняла проецирующее положение. С этой целью выполняем две последовательные замены плоскостей проекций.

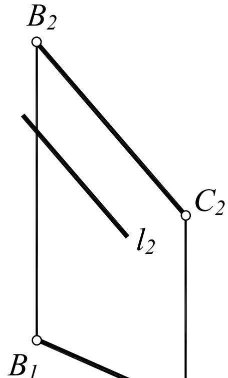

Рис. 12.14

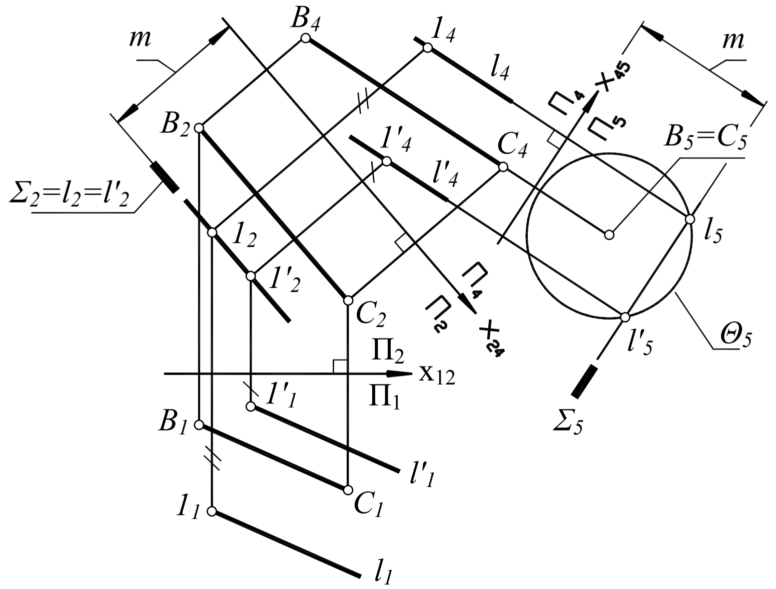

Рис. 12.15

Первая замена плоскостей проекций. Вместо плоскости Π_1 вводим в рассмотрение новую плоскость проекций Π_4, параллельную прямой BC и перпендикулярную плоскости Π_2. Получаем новую систему координат Π_2/Π_4, в которой прямая BC стала прямой уровня (BC параллельна Π_4). Плоскость Σ также параллельна плоскости Π_4.

Вторая замена плоскостей проекций. В системе координат $П_2/П_4$ сохраняем плоскость $П_4$, а плоскость $П_2$ заменяем плоскостью $П_5$, расположенной перпендикулярно к прямой BC. Получаем систему координат $П_4/П_5$, в которой цилиндр Θ занимает проецирующее положение.

В системе координат $П_4/П_5$ плоскость Σ по-прежнему параллельна плоскости $П_4$, поэтому проекция Σ_5 плоскости Σ параллельна оси x_{45}, причем расстояние от Σ_5 до x_{45} на плоскости $П_5$ равно расстоянию от Σ_2 до x_{24} на плоскости $П_2$ (это расстояние обозначено на рис. 12.15 буквой m).

В пересечении цилиндра Θ и плоскости Σ получаем две прямые l и l', которые удовлетворяют условиям задачи: они параллельны прямой BC и удалены от нее на *20 мм*. Таким образом, в системе координат $П_4/П_5$ задача решена.

Найденные решения l и l' необходимо “возвратить” в исходную систему координат $П_1/П_2$. Для этого в системе координат $П_4/П_5$ отмечаем на прямых l и l' произвольные точки *1* и *1'*. На плоскости $П_2$ проекции этих точек принадлежат проекции l_2 прямой l.

Горизонтальные проекции 1_1 и $1'_1$ точек *1* и *2* определяются с учетом основного инварианта преобразования системы координат: *расстояние от любой точки до новой плоскости проекций равно расстоянию от этой же точки до заменяемой плоскости проекций*. Отсюда следует, что расстояние от 1_4 до x_{24} на плоскости $П_4$ равно расстоянию от 1_1 до x_{12} на плоскости $П_1$. Расстояния $|1_4' - x_{24}|$ и $|1_1' - x_{12}|$ также равны между собой. Это позволяет отметить горизонтальные проекции 1_1 и $1'_1$ точек *1*, *1'* и провести через них горизонтальные проекции l_1 и l_1' искомых прямых (параллельно горизонтальной проекции прямой BC). Задача решена в исходной системе координат.

Вопросы для повторения

1. Какие геометрические задачи называют комбинированными (комплексными)?

2. Какие элементарные построения надо уметь выполнять на чертеже для успешного решения типовых комплексных задач? Перечислить типовые позиционные и метрические задачи, встречающиеся в процессе решения различных комбинированных задач.

3. Что означает словосочетание “геометрическое место точек”? Приведите примеры геометрических мест точек.

4. Геометрическое место точек, удаленных от точки A на расстояние R, есть сфера с центром A и радиусом R. Что представляет собой множество прямых, удаленных от точки A на расстояние R?

5. Геометрическое место точек, удаленных от прямой a на расстояние R, есть цилиндр вращения с осью a и радиусом R. Что представляет собой множество прямых, удаленных от прямой a на расстояние R?

6. В какой последовательности следует решать комбинированную геометрическую задачу? С чего начинается решение? Каким действием завершается решение задачи?

7*. Построить прямую, пересекающую четыре данные прямые a, b, c, d общего положения (рис. 12.16). Сколько решений может иметь эта задача?

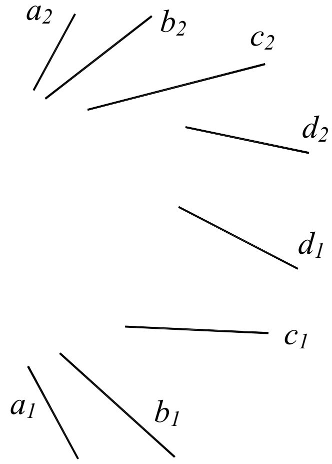

Рис. 12.16

*Задача 7 рекомендуется для решения на факультативных занятиях (с использованием средств компьютерной графики).