Лекция 11

ПЛОСКОСТЬ, КАСАТЕЛЬНАЯ К ПОВЕРХНОСТИ

Первоначальное понятие о касающихся друг друга линиях или поверхностях мы приобретаем из повседневного опыта. Например, интуитивно ясно, что лежащие на столе линейка (прямая линия) и гимнастический обруч (окружность) могут касаться друг друга. При этом у них будет только одна общая точка. Шар, лежащий на столе, касается плоскости стола. Можно сказать иначе: плоскость стола касается шара. Плоскость и шар имеют единственную общую точку – точку касания.

Этим наглядным представлениям надо придать форму точных математических определений. Рассмотрим следующие геометрические понятия:

– прямая, касательная к кривой линии;

– прямая, касательная к поверхности;

– плоскость, касательная к поверхности.

11.1. Общие определения

Касательной прямой t к кривой линии l называют предельное положение секущей s=MM', когда точка M', оставаясь на линии l, стремится к точке M (секущая – это прямая, пересекающая кривую линию в двух точках). Точку M называют точкой касания (рис. 11.1). Касание можно рассматривать как частный случай пересечения, когда точки пересечения совпадают.

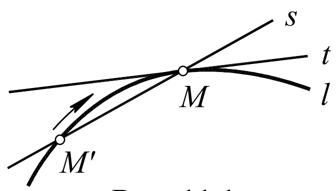

Рис. 11.1

Пусть имеется некоторая поверхность Φ, на которой отмечена произвольная точка M (рис. 11.2). Проведем через M секущую s, пересекающую поверхность в точке M'.

Касательной прямой t к поверхности Φ называют предельное положение секущей MM', когда точка M', оставаясь на поверхности Φ, стремится к точке касания M.

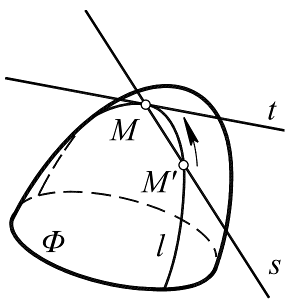

Рис. 11.2

Точка M', перемещаясь к точке касания M, может двигаться по произвольной кривой линии l, лежащей на поверхности Φ (см. рис. 11.2). В точке M прямая t будет касательной не только к поверхности Φ, но и к кривой l. Поэтому касательную к поверхности можно определить следующим образом.

Касательной прямой t к поверхности Φ называют прямую, касательную к какой-нибудь кривой, лежащей на этой поверхности.

Прямая линия, касательная к какой-нибудь кривой, лежащей на поверхности, касается этой поверхности. Поскольку через данную точку поверхности можно провести множество разных кривых, лежащих на этой поверхности, то и касательных в данной точке поверхности может быть бесчисленное множество. В курсе дифференциальной геометрии доказывается, что все прямые, касательные к поверхности в данной ее точке, лежат в одной плоскости.

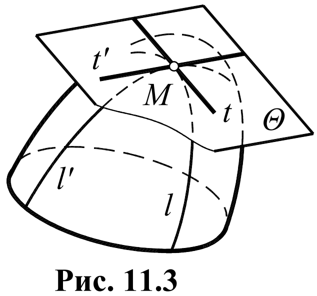

Рис. 11.3

Касательной плоскостью Θ к поверхности Φ в точке M называют геометрическое место касательных к всевозможным кривым, проходящим по поверхности через данную точку M.

Из этого определения следует, что плоскость Θ, касательную к поверхности в данной точке M, можно задать двумя прямыми t и t', касательными к двум произвольным гладким кривым l и l', проведенным по поверхности через точку M (рис. 11.3).

11.2. Три типа точек поверхности

Рассмотрим взаимное расположение касательной плоскости и поверхности, к которой она проведена. Здесь возможны различные случаи.

Случай 1. *Касательная плоскость имеет с поверхностью одну общую точку*; *в окрестности точки касания поверхность расположена по одну сторону от касательной плоскости*.

Такие точки поверхности называют эллиптическими. Например, выпуклые криволинейные поверхности (сфера, эллипсоид и др.) содержат только эллиптические точки.

Название “*эллиптические точки*” можно наглядно пояснить следующим образом. Пусть в точке A плоскость Θ касается выпуклой поверхности вращения (рис. 11.4). Немного сдвинем эту плоскость параллельно самой себе в направлении нормали к поверхности. В своем новом положении плоскость Θ пересечет данную поверхность по замкнутой кривой e, напоминающей эллипс. На дополнительной плоскости проекций Π_4 изображена истинная форма e_4 кривой e.

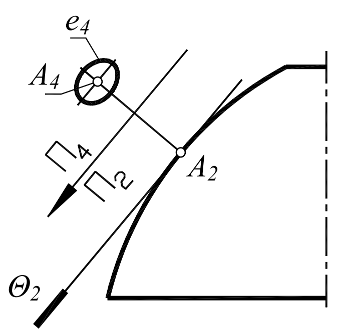

Рис. 11.4

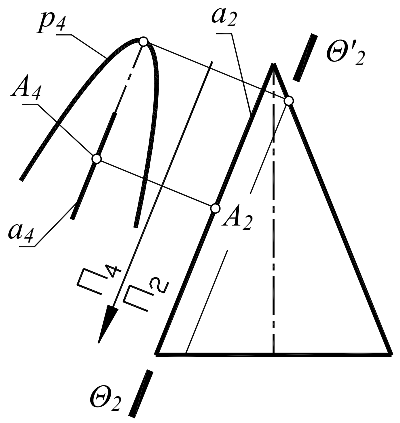

Рис. 11.5

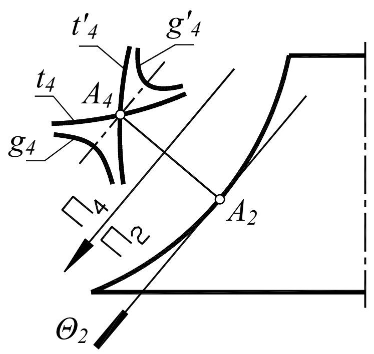

Рис. 11.6

В технических приложениях замкнутую область, ограниченную кривой e, называют “пятном контакта” поверхности с касательной плоскостью. Для всех выпуклых тел форма пятна контакта близка к эллипсу, чем и объясняется название точки на поверхности тела. В частности, если пятно контакта имеет форму окружности, то такую точку поверхности называют омбилической, или точкой округления.

Случай 2. *Касательная плоскость соприкасается с поверхностью по линии*; *в окрестности линии касания поверхность может быть расположена по одну или по разные стороны от касательной плоскости*.

Точки такой поверхности, лежащие на линии касания, называют параболическими. Например, развертывающиеся поверхности (цилиндры, конусы, произвольные торсовые поверхности) содержат только параболические точки.

Название “*параболические точки*” можно наглядно пояснить следующим образом. Пусть плоскость Θ касается конуса вращения в точке A, лежащей на образующей a (рис. 11.5). При этом касание происходит не только в точке A, но вдоль всей образующей a. Немного сдвинем касательную плоскость Θ параллельно самой себе в направлении нормали к поверхности до положения Θ'. Плоскость Θ' пересечет конус по параболе p, чем и объясняется название точек на поверхности.

Случай 3. *Касательная плоскость соприкасается с поверхностью в одной точке, но при этом пересекает поверхность; в окрестности точки касания поверхность располагается по разные стороны от касательной плоскости* (рис. 11.6).

Такие точки называют гиперболическими. Отсек поверхности в области гиперболической точки *A* имеет седлообразную форму (рис. 11.7).

Название "*гиперболические точки*" можно пояснить следующим образом. Пусть в точке *A* плоскость Θ касается вогнутой поверхности вращения (см. рис. 11.6). В области точки *A* поверхность имеет выпукло-вогнутую (седлообразную) форму. Касательная плоскость Θ пересекается с ней по кривым t и t', проходящим через точку *A*.

Немного сдвинем эту плоскость параллельно самой себе в направлении нормали к поверхности. В своем новом положении плоскость Θ пересечется с поверхностью по двум кривым g и g', напоминающим ветви гиперболы. На дополнительной плоскости проекций Π_4 изображена истинная форма кривых t, t' и g, g', которые похожи на асимптоты и две ветви гиперболы (см. рис. 11.6). Этим сходством объясняется название точек седлообразной поверхности.

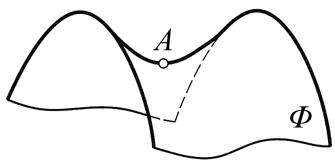

Рис. 11.7

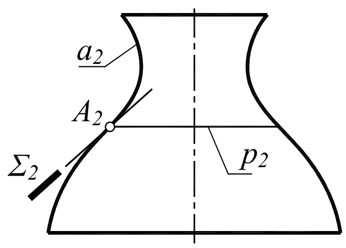

Рис. 11.8

Названия трех типов точек поверхности (эллиптические, параболические, гиперболические) объясняются не только сходством "пятен контакта" с соответствующими кривыми второго порядка. Эти названия имеют точный математический смысл, обусловленный возможностью замены малой области данной поверхности отсеком наиболее тесно соприкасающегося с ней параболоида: эллиптического, гиперболического или вырожденного параболоида (параболического цилиндра).

Поверхности, содержащие все три типа точек, называются поверхностями двоякой кривизны. Например, поверхность вращения с выпукло-вогнутым меридианом *a* содержит области эллиптических и гиперболических точек, отделенные друг от друга параллелью *p*, проходящей через точку перегиба *A* меридиана *a* (рис. 11.8). Выше параллели *p* находится область гиперболических точек, ниже *p* – область эллиптических точек. Бесконечно узкий "поясок" *p* данной поверхности вращения состоит из параболических точек и может рассматриваться как бесконечно узкий участок конической поверхности с касательной плоскостью Σ.

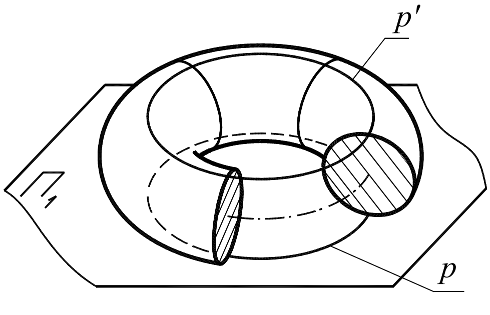

Рис. 11.9

Поверхность открытого тора содержит эллиптические точки на "наружной" поверхности и гиперболические (седловые) точки на "внутренней" поверхности. Области эллиптических и гиперболических точек отделены параллелями p и p', состоящими из параболических точек (рис. 11.9).

11.3. Примеры построения касательных плоскостей

Рассматривают три основных типа задач на построение плоскости, касательной к какой-либо кривой поверхности.

1. Касание в данной точке поверхности (*через данную точку поверхности провести касательную плоскость*).

2. Касание из внешней точки (*провести касательную плоскость через точку, лежащую вне данной поверхности*).

3. Касание с учетом дополнительных условий (*к данной поверхности провести касательную плоскость, удовлетворяющую некоторым дополнительным условиям*).

Касательная плоскость к поверхности в заданной ее точке определяется двумя прямыми, касающимися двух пересекающихся в этой точке кривых линий на поверхности. Поэтому решение задачи первого типа (*через данную точку поверхности провести касательную плоскость*) сводится к построению пары наиболее простых по форме и расположению кривых линий на поверхности, проходящих через данную точку, и построению прямых, касательных к этим линиям в точке их пересечения.

Задача второго типа (*из внешней точки A, не лежащей на поверхности Ф, провести к этой поверхности касательную плоскость*) может быть сведена к задаче первого типа. Проведем через данную точку A произвольную секущую плоскость Λ, которая рассекает данную поверхность (рис. 11.10). Из точки A строим касательную a к линии разреза $l=\Phi\cap\Lambda$ и отмечаем точку касания L. Получаем задачу первого типа: через точку L на поверхности Φ провести плоскость, касательную к этой поверхности. Эта плоскость обязательно будет заключать в себя касательную a (так как a касается поверхности Φ в точке L), следовательно, и точку A, лежащую на этой касательной.

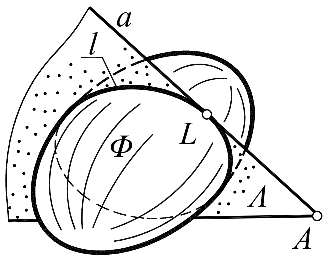

Рис. 11.10

Задача второго типа имеет множество решений. Действительно, к любой гладкой поверхности, за исключением поверхностей, содержащих только параболические точки (цилиндра, конуса и торса), из внешней точки можно провести множество касательных плоскостей.

Задача третьего типа (*построение касательной плоскости, удовлетворяющей дополнительным геометрическим условиям*) имеет конечное число решений. Пусть, например, требуется из внешней точки провести касательную плоскость к сфере. Такая задача имеет бесконечное множество решений. Но если потребовать, чтобы касательная плоскость проходила еще через одну точку (то есть наложить дополнительное условие), то число решений сокращается до двух.

Построение касательной плоскости, удовлетворяющей заданным условиям, может считаться *комбинированной задачей* (см. лекцию 12).

11.3.1. Касание в данной точке поверхности (задачи первого типа)

Задача 1. *Построить плоскость Θ, касающуюся сферы в точке A на ее поверхности* (рис. 11.11).

Мысленно разрежем сферу плоскостями уровня Λ и Γ, проходящими через A. Получаем две линии разреза: l и g. Через точку A проведем в плоскости Λ горизонталь h, касательную к линии разреза l, в плоскости Γ – фронталь f, касательную к линии разреза g. Пересекающиеся прямые h и f определяют плоскость Θ, касательную к сфере в точке A. Задача решена.

Задача 2. *Построить плоскость Θ, касающуюся конуса вращения в точке A на его поверхности* (рис. 11.12).

Через точку A проведем плоскость уровня Λ, пересекающую конус по параллели l. Горизонталь h касается этой параллели в точке A. Образующая конуса SB и горизонталь h, пересекающиеся в точке A, определяют плоскость Θ, касающуюся конуса не только в точке A, но вдоль всей образующей SB. Задача решена.

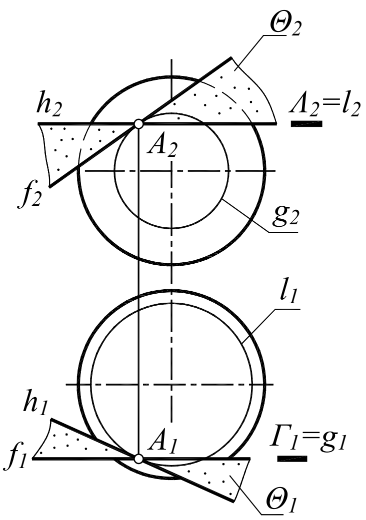

Рис. 11.11

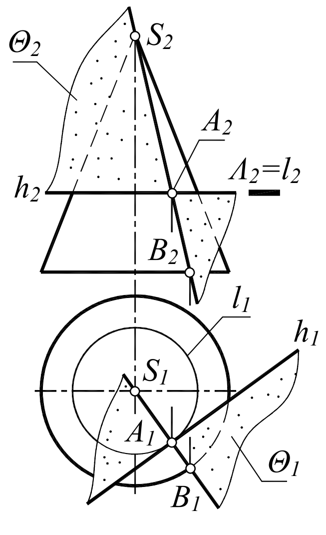

Рис. 11.12

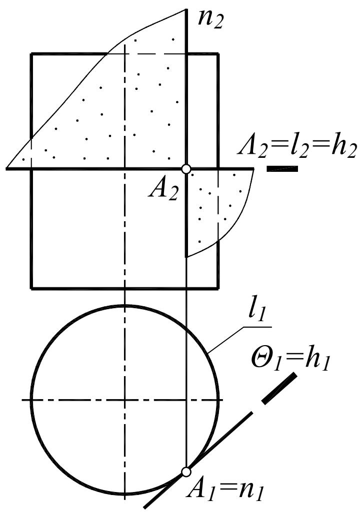

Рис. 11.13

Задача 3. *Построить плоскость Θ, касающуюся прямого кругового цилиндра в точке A на его поверхности* (рис. 11.13).

Через точку A проведем плоскость уровня Λ, пересекающую цилиндр по параллели l. Горизонталь h касается этой параллели в точке A. Вертикальная образующая n цилиндра и горизонталь h, пересекающиеся в точке A, определяют плоскость Θ, касающуюся конуса не только в точке A, но вдоль всей образующей n. Задача решена.

Задача 4. *Построить плоскость Θ, касающуюся поверхности вращения (“кувшин”) в точке A* (рис. 11.14).

Через точку A проведем горизонтальную плоскость уровня Λ, пересекающую кувшин по параллели (окружности) l. Горизонталь h касается параллели в точке A, следовательно, h – прямая, касательная к поверхности в точке A.

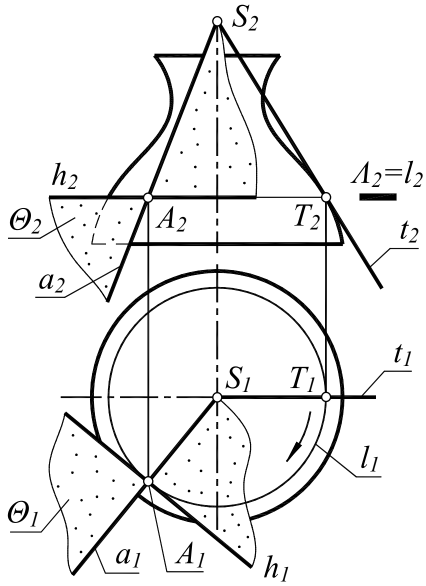

Рис. 11.14

Начертим касательную t к фронтальному очерку поверхности в точке T, лежащей в плоскости Λ, и отметим точку S пересечения этой касательной с осью поверхности (касательная t может быть начерчена только приближенно, так как фронтальная очерковая линия кувшина – незакономерная графически заданная кривая линия). Будем мысленно вращать касательную t вокруг оси. При этом точка касания “скользит” по параллели l. Когда точка касания совпадет с точкой A, касательная займет положение $a=SA$. Прямые a и h, касающиеся поверхности в точке A, определяют положение искомой касательной плоскости Θ. Задача решена.

Правило. *Задачи на построение плоскости, касательной к поверхности в данной ее точке, решаются по общей схеме: построение двух графически простых кривых линий на поверхности, проходящих через данную точку, и построение прямых, касательных к этим линиям в данной точке. Эти прямые определяют положение искомой касательной плоскости.*

11.3.2. Касание из внешней точки (задачи второго типа)

Как уже отмечалось, задача второго типа (*через внешнюю точку провести к поверхности касательную плоскость*) имеет, как правило, множество решений. Например, через произвольную точку пространства проходит бесконечное множество плоскостей, касающихся сферы. Но к конической, цилиндрической поверхности или к торсу можно провести лишь конечное число касательных плоскостей.

Это различие в числе решений объясняется тем, что множество плоскостей, проходящих через данную точку, образует связку (двупараметрическое множество). Требование, чтобы плоскость, принадлежащая связке, касалась гладкой неразвертывающейся поверхности, “отнимает” у плоскости один параметр (одну степень свободы). Поэтому остается однопараметрическое (∞^1) множество решений. Но требование, чтобы плоскость касалась развертывающейся поверхности (конуса, цилиндра или торса), отнимает у плоскости, принадлежащей данной связке, два параметра (две степени свободы). Поэтому через произвольную точку пространства можно провести к конусу, цилиндру или торсу лишь конечное число касательных плоскостей [9].

Задача 1. *Через внешнюю точку A провести плоскость Θ, касающуюся сферы* (рис. 11.15).

Через точку *A* проведем произвольную секущую плоскость, например, фронтальную плоскость уровня *Г*. Плоскость *Г* разрезает сферу по окружности *g*. В плоскости *Г* проведем через точку *A* фронталь *f*, касающуюся окружности *g* в точке *L*.

Через точку *L* проведем еще одну произвольную плоскость, например, горизонтальную плоскость уровня *Λ*, разрезающую сферу по окружности *l*. В плоскости *Λ* начертим горизонталь *h*, касающуюся линии разреза *l* в точке *L*.

Таким образом, прямые *h* и *f* – касательные в точке *L* к линиям *l* и *g*, лежащим на сфере. Следовательно, плоскость $\Theta(h \cap f)$ в точке *L* касается сферы. Плоскость *Θ* – искомая, так как проходит через внешнюю точку *A*.

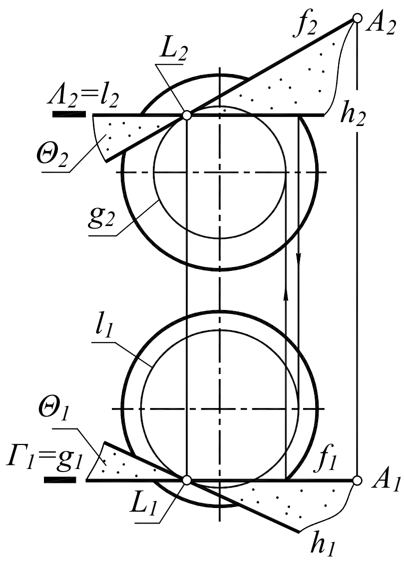

Рис. 11.15

Задача имеет бесчисленное множество решений. Действительно, представим себе коническую поверхность с вершиной в точке *A*, описанную около данной сферы. Любая плоскость, касающаяся конической поверхности, коснется также и сферы в точке, лежащей на линии касания сферы и конической поверхности (линия касания конической поверхности и вписанной в нее сферы – окружность).

Задача 2. *Через внешнюю точку A провести плоскость Θ, касающуюся эллиптического конуса с круговым основанием* (рис. 11.16).

Горизонтальная плоскость уровня *Λ*, проходящая через данную точку *A*, разрезает конус по окружности *l* с центром *O*. Из точки *A* проведем к окружности *l* две касательные *h*, *h'* и отметим точки касания *L* и *M*. В этих точках горизонтали *h* и *h'*, проходя через точку *A*, касаются поверхности конуса.

Задача оказалась сведена к задаче *первого типа*: провести касательные плоскости через точки *L* и *M*, принадлежащие поверхности конуса. Для этого достаточно провести через *L*, *M* еще по одной касательной к поверхности конуса. В качестве этих касательных можно взять образующие конуса *SU* и *SV*, проходящие через точки *L* и *M*.

Образующая конуса SU и горизонталь h, пересекающиеся в точке L, определяют плоскость Θ, проходящую через внешнюю точку A и касающуюся конуса вдоль образующей SU.

Образующая SV и горизонталь h', пересекающиеся в точке M, определяют еще одну плоскость Θ', также проходящую через A и касающуюся конуса вдоль образующей SV. Задача полностью решена (через внешнюю точку A к конической поверхности второго порядка проведены две касательные плоскости).

Таким образом, все задачи второго типа (*“через внешнюю точку A провести к поверхности касательную плоскость”*), решаются по следующей общей схеме.

1. Рассекаем поверхность произвольной плоскостью, проходящей через заданную внешнюю точку A.

2. Проводим через точку A касательную l к линии разреза и отмечаем точку касания L.

3. Решаем ранее рассмотренную задачу первого типа: через точку L на поверхности проводим плоскость, касательную к этой поверхности.

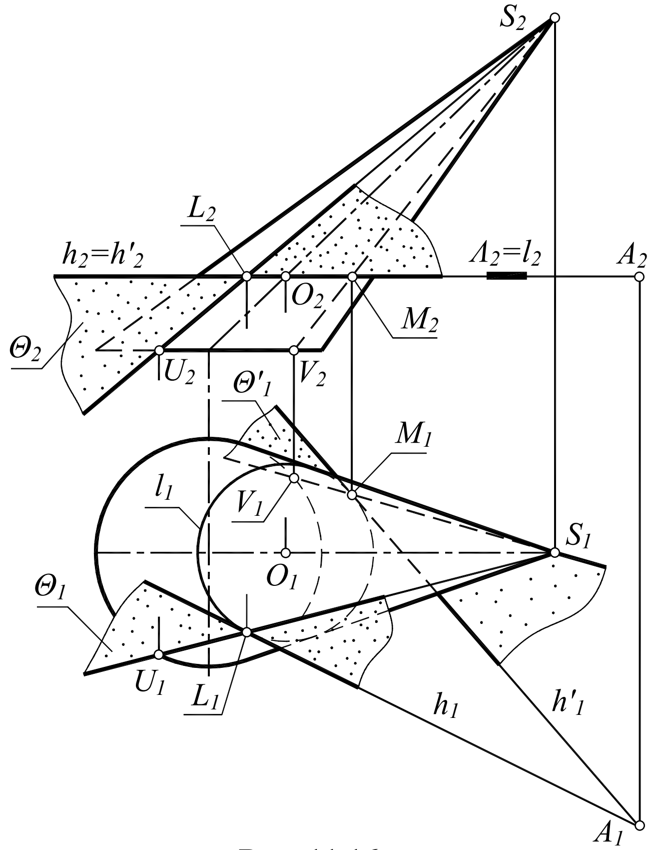

Рис. 11.16

11.3.3. Касание с учетом дополнительных условий (задачи третьего типа)

Задачи третьего типа отличаются большим разнообразием и отсутствием универсальной схемы их решения. Рассмотрим некоторые из них.

Построить плоскость, касательную к поверхности Ф, проходящую через данную прямую или параллельную данной прямой.

Построить плоскость, касательную к поверхности Ф, параллельную данной плоскости.

Построить плоскость, касательную к двум поверхностям (например, к конусу и сфере).

Такие задачи не всегда имеют решение. Пусть, например, требуется через данную прямую провести касательную плоскость к поверхности цилиндра или конуса. Чтобы эта задача имела решение, данная прямая должна либо проходить через вершину конуса, либо располагаться параллельно образующим цилиндра.

Задача 1. *Провести плоскость, касательную к сфере Ф и проходящую через прямую a общего положения* (рис. 11.17).

Плоскости Θ и Θ', касательные к сфере и проходящие через данную прямую a, должны касаться цилиндра, описанного около сферы и имеющего образующие, параллельные a. Поэтому точки касания плоскостей Θ и Θ' со сферой лежат в плоскости Σ, перпендикулярной к прямой a и проходящей через центр сферы.

Строим плоскость Σ, для чего через центр сферы O проводим горизонталь h и фронталь f так, чтобы выполнить условия теоремы о перпендикулярности прямой a и плоскости Δ: $h_1 \perp a_1$, $f_2 \perp a_2$.

Находим линию пересечения d сферы Φ и плоскости Σ: $d=\Phi \cap \Sigma$. Отмечаем точку A пересечения прямой a с плоскостью Σ: $A=a \cap \Sigma$ (некоторые вспомогательные построения на рис. 11.17 не показаны).

В плоскости Σ проводим из точки A касательные l и m к окружности d и отмечаем точки касания L и M. Через эти точки проходят искомые касательные плоскости Θ и Θ'. Задача решена.

В процессе решения потребовалось вычерчивать эллипсы d_1, d_2 (проекции окружности d) и строить касательные к эллипсам. Чтобы не вычерчивать эллипсы, можно применить способ замены плоскостей проекций (преобразовать прямую общего положения a в проецирующую прямую). Тогда на одной из плоскостей проекций прямая a будет изображаться точкой, а проекция окружности d останется окружностью.

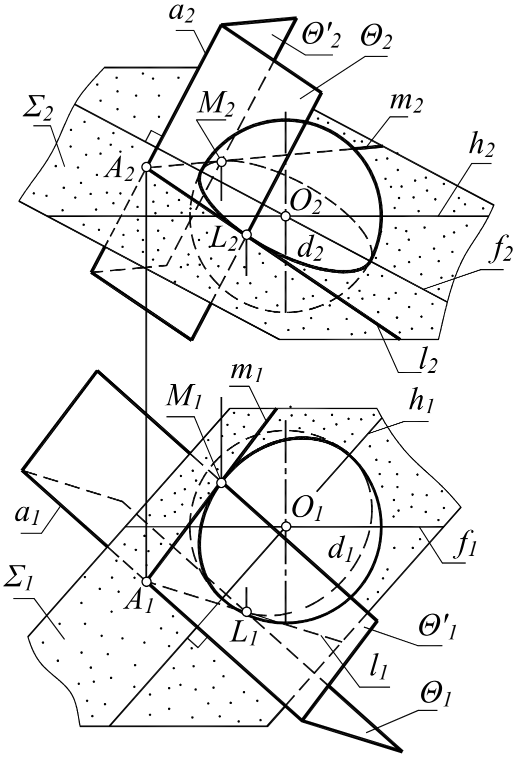

Рис. 11.17

Задача 2. *Провести плоскость, касательную к трем сферам.*

Пусть центры сфер O, O', O'' расположены в горизонтальной плоскости уровня Σ (рис. 11.18). Введем в рассмотрение вспомогательные конусы, описанные около данных сфер. Конус с вершиной S, описанный около левой и средней сфер, касается их по окружностям a и b. Конус с вершиной S', описанный около правой и средней сфер, соприкасается с этими сферами по окружностям c и b'.

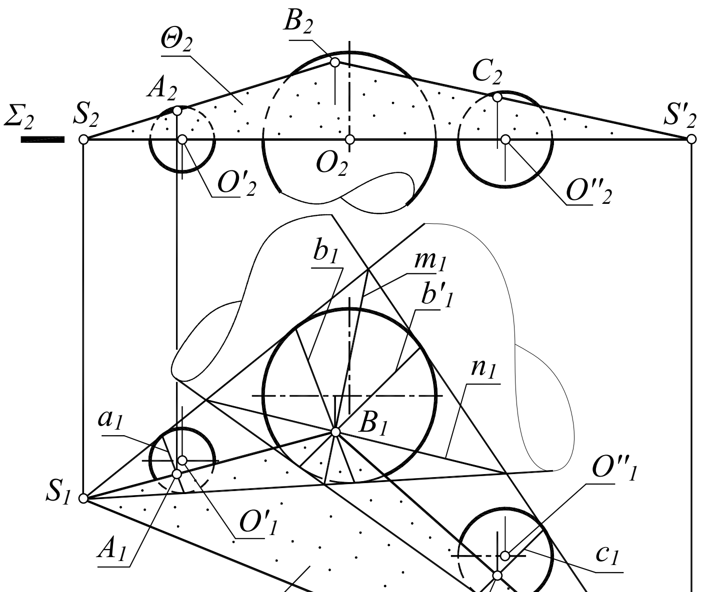

Рис. 11.18

Линия пересечения вспомогательных конусов, согласно теореме Монжа, распадается на две плоские кривые, в данном случае – на два эллипса m и n. Плоскости эллипсов m, n проходят через прямую, соединяющую точки B и B' пересечения линий касания b и b'. В точках B и B' происходит соприкосновение вспомогательных конических поверхностей с вписанной в них средней сферой. Иначе говоря, в этих точках оба конуса и средняя сфера имеют общие касательные плоскости. Точки B и B' расположены симметрично относительно плоскости Σ (точка B' на рис. 11.18 условно не показана).

Через точку B проходит плоскость Θ, касающаяся конусов по образующим SB и $S'B$. Соприкасаясь с поверхностями вспомогательных конусов, плоскость Θ касается также и сфер, вписанных в эти конусы.

Таким образом, плоскость $\Theta(SBS')$ является искомой, так как она касается всех трех сфер. На рис. 11.18 отмечены точки касания A, B, C, лежащие на пересечении прямых SB и $S'B$ и линий касания сфер с вспомогательными конусами. Задача решена. В зависимости от взаимного расположения сфер в пространстве задача может иметь от двух до шести решений.

Задача 3. *Построить плоскость, касательную к наклонному эллиптическому цилиндру с круговым основанием и параллельную прямой общего положения.*

Через какую-нибудь точку на оси цилиндра (например, через центр B верхнего основания) проводим прямую, параллельную данной прямой a (рис. 11.19). В точке R эта прямая пересекается с плоскостью основания цилиндра. Получаем плоскость ABR, параллельную прямой a и проходящую через ось AB цилиндра.

Переместим плоскость ABR параллельно самой себе до положения $\Theta(A'B'R')$. В новом положении горизонталь $A'R'$, лежащая в плоскости Θ, касается кругового основания цилиндра, а прямая $A'B'$, параллельная оси цилиндра, касается цилиндра вдоль его образующей. Плоскость $\Theta(A'B'R')$ касается цилиндра вдоль образующей $A'B'$ и параллельна плоскости ABR, которая, в свою очередь, параллельна прямой a. Следовательно, плоскость Θ параллельна прямой a.

Таким образом, плоскость $\Theta(A'B'R')$ – искомая, так как она касается цилиндра и параллельна данной прямой. Задача имеет два решения. Второе решение на рис. 11.19 условно не показано.

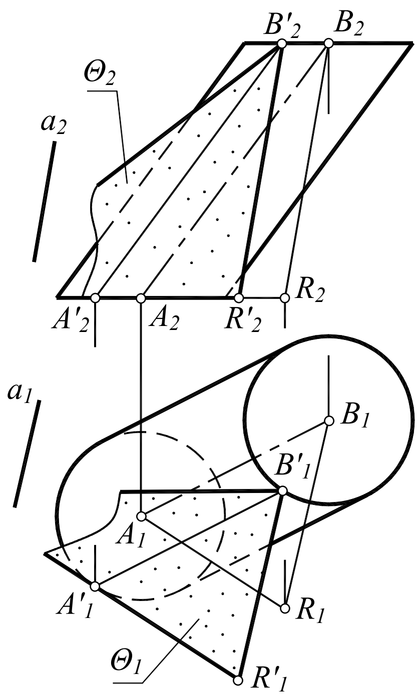

Рис. 11.19

Вопросы для повторения

1. Дать определения понятиям “прямая линия, касательная к поверхности” и “плоскость, касательная к поверхности”.

2. Перечислить три типа точек поверхности. Чем объясняются названия точек?

3. По какой линии происходит касание плоскости и развертывающейся поверхности?

4. В каком случае плоскость, касающаяся поверхности, пересекает эту поверхность? Может ли плоскость, касательная к развертывающейся поверхности, пересекать эту поверхность?

5. Возможно ли, чтобы на гладкой поверхности были эллиптические и гиперболические точки, но не было параболических точек?

6. Сформулируйте правило построения плоскости, касательной к поверхности в данной точке этой поверхности.

7. Какие задачи называют задачами первого типа? Какие задачи называются задачами второго типа?

8. Сформулируйте схему решения задачи второго типа. Можно ли свести задачу второго типа к задаче первого типа?