Лекция 10

ОСОБЫЕ СЛУЧАИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Поверхностью второго порядка называется геометрическое место точек, координаты x, y, z которых удовлетворяют алгебраическому уравнению второго порядка в декартовой системе координат:

$$Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Eyz+Fzx+Gx+Hy+Kz+1=0.$$

Девять коэффициентов A, B, C,...K определяют единственную поверхность второго порядка. В зависимости от конкретных числовых значений этих коэффициентов получаются пять типов поверхностей второго порядка: *эллипсоид, однополостный гиперболоид, двуполостный гиперболоид, эллиптический параболоид, гиперболический параболоид*.

Особенно важное практическое значение имеют частные случаи поверхностей второго порядка: *сферические, цилиндрические* и *конические поверхности* как частные случаи эллипсоида и однополостного гиперболоида.

Коническая поверхность второго порядка геометрически образуется движением прямолинейной образующей, проходящей через неподвижную точку S и пересекающей направляющую m, где m – кривая второго порядка. Если точка S удалена в бесконечность, то получаем *цилиндрическую поверхность второго порядка* (см. лекцию 6).

Таким образом, поверхности второго порядка – это эллипсоиды, гиперболоиды, параболоиды и их частные случаи (сферические, цилиндрические и конические поверхности второго порядка). Этим списком полностью исчерпывается класс невырожденных поверхностей второго порядка. Никакая другая поверхность не может быть названа поверхностью второго порядка (если исключить из рассмотрения мнимые поверхности и случаи вырождения поверхности второго порядка в пару плоскостей).

Поверхности второго порядка – самые простые поверхности из всех возможных (за исключением плоскости). Этим объясняется их значение при решении разнообразных научных и технических задач.

10.1. Взаимное пересечение поверхностей второго порядка. Особые случаи пересечения

Поскольку поверхности второго порядка являются алгебраическими, то и линия их пересечения есть алгебраическая кривая (в общем случае - пространственная). Так как порядок линии пересечения равен произведению порядков поверхностей, то эта линия – всегда кривая четвертого порядка. В отличие от других алгебраических кривых четвертого порядка, ее называют *биквадратной кривой*.

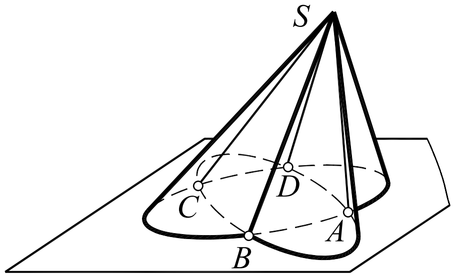

Рис. 10.1

Эта кривая может распадаться на несколько алгебраических линий более низких порядков: на четыре прямые ($4=1+1+1+1$), на две кривые второго порядка ($4=2+2$), на кривую второго порядка и две прямые ($4=2+1+1$), на кривую третьего порядка и прямую ($4=3+1$). Например, два эллиптических конуса с общей вершиной S пересекаются по четырем прямым SA, SB, SC, SD (рис. 10.1).

В прикладных геометрических задачах чаще всего встречается случай распадения биквадратной кривой на две кривые второго порядка. Условия, при которых возможно такое распадение, формулируются в виде трех теорем: теоремы о пересечении поверхностей второго порядка по плоской кривой, теоремы о двойном прикосновении, теоремы Монжа.

10.2. Теорема 1 (о пересечении двух поверхностей второго порядка по плоской кривой)

Зададим кривую второго порядка k и проведем через нее две какие-либо поверхности второго порядка. Пусть, например, линия k – окружность, через которую, как через направляющую, проходят коническая и цилиндрическая поверхности (рис. 10.2). Цилиндр и конус имеют общее круговое основание k, то есть данные поверхности заведомо пересекаются между собой по кривой второго порядка k.

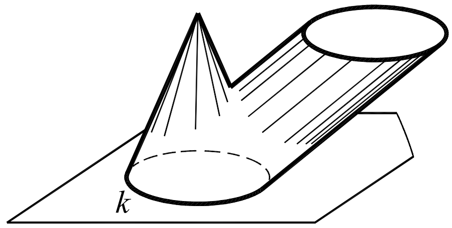

Рис. 10.2

Две поверхности второго порядка пересекаются по кривой четвертого порядка. Окружность k – только часть этой кривой. Следовательно, есть еще один участок искомой линии пересечения (не показанный на рис. 10.2), который также должен быть кривой второго порядка. Этот вывод кратко формулируют в виде теоремы.

Теорема 1. *Если две поверхности второго порядка пересекаются по одной плоской кривой, то они пересекаются и еще по одной плоской кривой.*

Любая плоская кривая на поверхности второго порядка – обязательно кривая второго порядка, поэтому можно теорему 1 сформулировать следующим образом**:** *если две поверхности второго порядка пересекаются по кривой второго порядка, то они пересекаются и еще по одной кривой второго порядка.*

Справедливость теоремы непосредственно вытекает из того, что сумма порядков линий, на которые распадается алгебраическая кривая, равна порядку самой линии. В данном случае имеем кривую четвертого порядка, причем одна часть ее (линия k) – кривая второго порядка. Следовательно, и вторая часть должна быть кривой второго порядка.

Приведем примеры, иллюстрирующие теорему 1.

Задача 1. *Построить линию пересечения поверхностей конуса и цилиндра с общим круговым основанием k* (рис. 10.3).

Согласно условию, данные поверхности пересекаются по кривой k, лежащей в плоскости основания Σ. Значит, в соответствии с теоремой 1, имеется еще одна часть e линии пересечения, которая должна быть кривой второго порядка. Чтобы построить недостающий участок линии пересечения, мысленно рассечем конус и цилиндр общей плоскостью симметрии Φ. В сечении получаются фронтальные очерки данных поверхностей.

Продолжив фронтальные очерковые линии, отмечаем точки A, B их пересечения. Через точки A, B должен проходить недостающий участок e искомой линии пересечения. Общая плоскость симметрии Φ параллельна плоскости проекций Π_2, поэтому кривая второго порядка e изобразится на Π_2 прямолинейным отрезком A_2B_2. Плоскость Θ кривой e пересекает все образующие конуса, значит, линия e – эллипс.

Таким образом, в рассмотренном примере линия пересечения поверхностей цилиндра и конуса распалась на две кривые второго порядка: окружность k (лежащая в плоскости Σ) и эллипс e (лежащий в плоскости Θ). Эти кривые пересекаются между собой в точках C и D. По фронтальной проекции эллипса e нетрудно построить его горизонтальную проекцию $e_1=A_1C_1B_1D_1$ (см. рис. 10.3).

Задача 2. *Построить линию пересечения поверхностей полусферы и конуса с общим круговым основанием k* (рис. 10.4).

Согласно условию, поверхности конуса и полусферы пересекаются по плоской кривой – окружности k. Следовательно, в соответствии с теоремой 1, данные поверхности пересекаются еще по одной плоской кривой e, которая также будет окружностью,

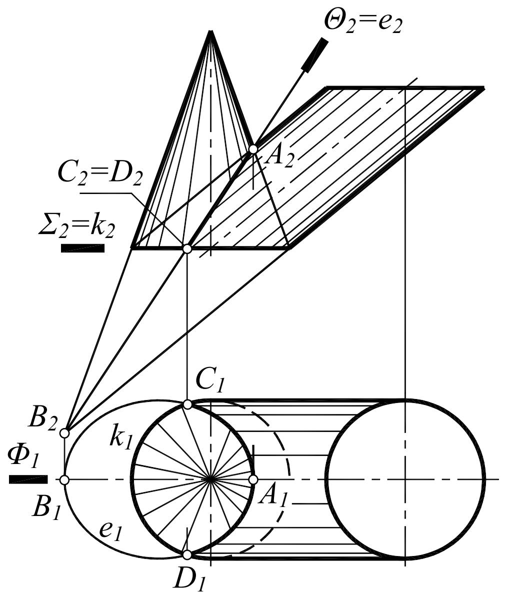

Рис. 10.3

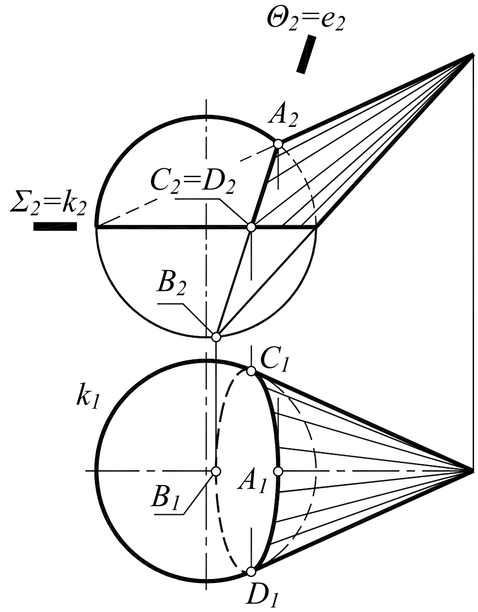

Рис. 10.4

так как любая плоская кривая на сфере – это окружность. Продлив фронтальные очерки данных фигур, отмечаем точки их пересечения A, B. Окружность e проходит через точки A, B и пересекается с основанием k в точках C, D (см. рис. 10.4).

В данном примере линия пересечения полусферы и конуса распалась на две окружности k и e, лежащие во фронтально-проецирующих плоскостях Σ и Θ. Фронтальная проекция окружности e – отрезок A_2B_2, ее горизонтальная проекция – эллипс $A_1C_1B_1D_1$.

10.3. Теорема 2 (о двойном соприкосновении)

Определение. *Две поверхности соприкасаются в некоторой точке A, если в этой точке у них есть общая касательная плоскость* (строгое определение понятия "касательная плоскость" будет дано в лекции 11).

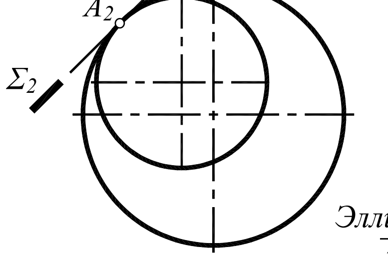

Рис. 10.5

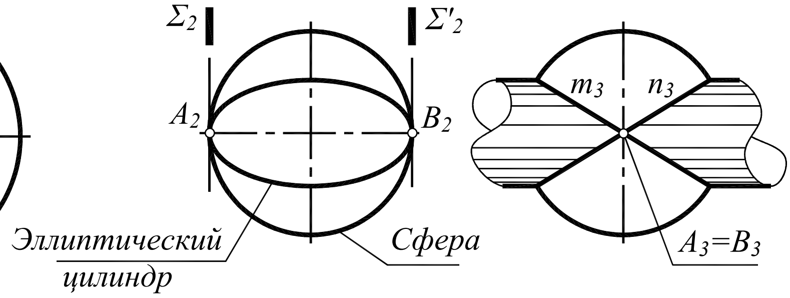

Рис. 10.6

Например, на рис. 10.5 показана фронтальная проекция двух сфер, которые соприкасаются друг с другом в точке A. В этой точке у них имеется общая касательная плоскость Σ.

Если поверхности имеют две точки соприкосновения, то такое соприкосновение называют “двойным”. На рис. 10.6 показан двухпроекционный чертеж (фронтальная и профильная проекции) сферы и эллиптического цилиндра. Эти поверхности находятся в двойном прикосновении, так как в точках A и B у них есть общие касательные плоскости Σ и Σ'.

По какой линии пересекаются поверхности второго порядка, находящиеся в двойном прикосновении? На этот вопрос отвечает теорема о двойном прикосновении (теорема 2).

Теорема 2. *Если две поверхности второго порядка касаются в двух точках, то линия их пересечения распадается на две плоские кривые (второго порядка), плоскости которых проходят через прямую, соединяющую точки касания.*

Приведенное ниже доказательство этой теоремы, содержащее некоторые сведения из проективной теории кривых второго порядка, не является обязательным для изучения в курсе начертательной геометрии.

Доказательство

Пусть поверхности второго порядка Σ и Δ касаются друг друга в точках A и B (рис. 10.7). Это означает, что в этих точках у них общие касательные плоскости Σ' и Δ'.

Поверхности Σ и Δ, не показанные на рис. 10.7, пересекаются по некоторой линии m. Про эту линию известно только то, что она должна проходить через точки A и B, так как это общие точки данных поверхностей.

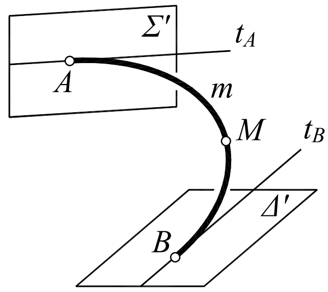

Рис. 10.7

Мысленно отметим на линии m произвольную точку M и также мысленно проведем секущую плоскость MAB. Эта плоскость “разрезает” заданные поверхности Σ и Δ по некоторым кривым второго порядка s и d, а касательные плоскости Σ' и Δ' – по прямым t_A и t_B.

Заметим, что в точке A прямая t_A является общей касательной к “линиям разреза” s и d. Действительно, линии s, d, t_A получены при пересечении соприкасающихся в точке A поверхностей Σ, Δ и Σ' плоскостью MAB, проходящей через точку A. При пересечении соприкасающихся поверхностей плоскостью, проходящей через точку касания, получаются линии, касательные друг к другу. Поэтому в точке A прямая t_A касается как кривой s, так и кривой d. Аналогичным образом, в точке B прямая t_B является общей касательной к линиям s и d.

Мы видим, что кривые второго порядка s и d имеют три общие точки A, B, M и две общие касательные в точках A и B. Но кривые второго порядка, имеющие пять общих элементов (три точки и две касательные), совпадают. Следовательно, плоскость MAB пересекает обе поверхности по одной и той же кривой второго порядка $s=d$. Эта кривая принадлежит данным поверхностям Σ и Δ, то есть является линией m их пересечения.

Таким образом, линия m пересечения поверхностей второго порядка, соприкасающихся в точках A и B – кривая второго порядка, проходящая через точки касания A и B.

В соответствии с теоремой 1, если две поверхности второго порядка пересекаются по кривой m второго порядка, то они пересекаются и еще по одной кривой n второго порядка. Покажем, что кривая n также проходит через точки A и B. Предположим, что n не проходит через A, B. Тогда кривые m и n пересекутся в каких-то других точках, в которых, как и в точках A, B, будет реализовано двойное соприкосновение поверхностей Σ и Δ. Но, согласно условию теоремы, данные поверхности касаются только в точках A и B. Поэтому предположение, что n не проходит через A, B, неверно. Следовательно, n проходит через точки A, B. Итак, линия пересечения двух поверхностей второго порядка, имеющих касание в двух точках, распадается на две плоские кривые m, n второго порядка, проходящие через точки касания. Теорема доказана.

Так, например, сфера и эллиптический цилиндр (см. рис. 10.6) соприкасаются в точках A и B. В этих точках сфера и цилиндр имеют общие касательные плоскости Σ и Σ'. В соответствии с теоремой о двойном прикосновении, линия их пересечения распадается на две плоские кривые (окружности m и n), плоскости которых проходят через прямую AB, соединяющую точки касания.

Рассмотрим пример применения теоремы о двойном прикосновении.

Задача. *Построить плоскость, пересекающую поверхность эллиптического конуса по окружности.*

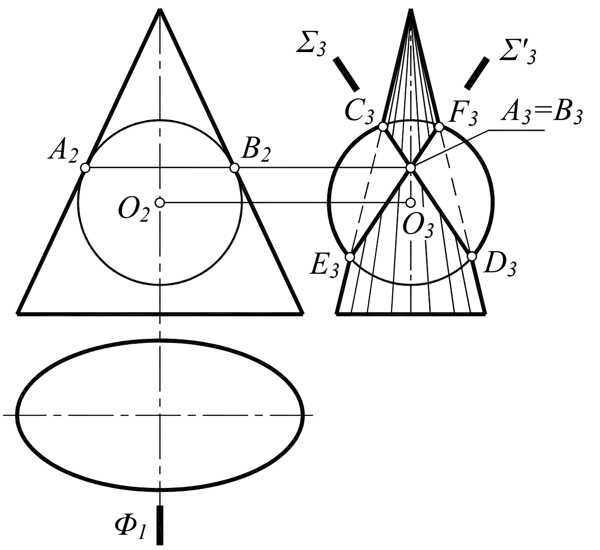

Рис. 10.8

Введем в рассмотрение вспомогательную сферу с центром в произвольной точке O на оси конуса и имеющую с ним касание в двух точках A и B (рис. 10.8). В этих точках сфера и конус имеют общие касательные плоскости. В соответствии с теоремой 2, через прямую AB пройдут плоскости Σ и Σ' кривых, по которым конус пересекается со сферой. Эти кривые – окружности, так как они лежат на поверхности сферы. Следовательно, плоскости Σ, Σ' пересекают поверхность конуса по окружностям.

В общей плоскости симметрии Φ (плоскость Φ параллельна Π_3) получаем профильные очерковые линии конуса и сферы, пересекающиеся между собой в точках C_3, D_3 и E_3, F_3. Через точки C, D и E, F, а также через пару точек A, B проходит линия пересечения данных поверхностей, распавшаяся на две окружности. На плоскости Π_3 эти окружности изображаются отрезками C_3D_3 и E_3F_3.

Таким образом, на поверхности эллиптического конуса имеются два семейства круговых сечений: любая плоскость, параллельная плоскостям Σ или Σ', пересекает поверхность эллиптического конуса по окружности.

Одно из замечательных свойств поверхностей второго порядка состоит в том, что все эти поверхности, за исключением гиперболического параболоида, гиперболического и параболического цилиндров, имеют круговые сечения. Для построения круговых сечений какой-либо поверхности второго порядка может быть использована вспомогательная сфера, касающаяся этой поверхности в двух точках. На основании теоремы о двойном прикосновении, данная поверхность будет пересекаться с вспомогательной сферой по искомым круговым сечениям.

10.4. Теорема Монжа

Поверхности второго порядка могут соприкасаться между собой не только в отдельных точках, но и по плоской кривой (второго порядка). В этом случае говорят, что одна из поверхностей “вписана” (плотно вложена) в другую поверхность или одна из поверхностей “описана” (плотно облегает) другую поверхность.

Определение. *Поверхность второго порядка вписана в другую поверхность второго порядка (или описана около нее), если эти поверхности касаются друг друга по плоской кривой.*

Например, в круговой цилиндр радиусом *R* можно вложить сферу такого же радиуса *R*. Цилиндр и сфера будут соприкасаться по окружности. При этом говорят, что сфера *вписана* в цилиндр, а цилиндр *описан* около сферы.

Сфера может быть вписана не только в цилиндр, но и в круговой конус. В этом случае сфера и конус также соприкасаются по окружности.

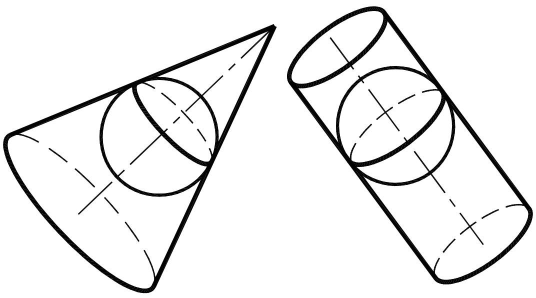

Рис. 10.9

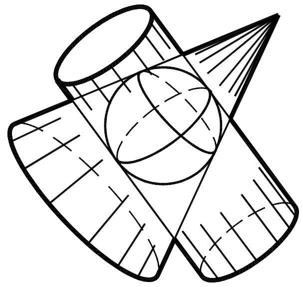

Рис. 10.10

На рис. 10.9 показаны две сферы. Одна из них вписана (плотно вложена) в круговой конус, другая сфера вписана (плотно вложена) в цилиндр вращения. И наоборот: конус и цилиндр, показанные на рис. 10.9, описаны около вложенных в них сфер.

Пусть конус и цилиндр описаны около одной сферы (рис. 10.10). Как выглядит линия их пересечения? Ответ на этот вопрос дает теорема 3 (теорема Монжа).

Теорема 3 (теорема Монжа). *Если две поверхности второго порядка описаны около третьей или вписаны в нее, то они пересекаются по двум плоским кривым. Плоскости этих кривых проходят через прямую, соединяющую точки пересечения линий касания.*

Доказательство

Пусть поверхности второго порядка Θ и Γ описаны около поверхности Φ и соприкасаются с ней по плоским кривым t и g. Кривые t и g, лежащие на Φ, пересекаются в точках T и G. В этих точках поверхности Θ, Γ и Φ имеют общие касательные плоскости. Значит, в точках T и G имеется двойное прикосновение поверхностей Θ и Γ. Следовательно, на основании теоремы о двойном прикосновении, эти поверхности пересекаются по двум плоским кривым, плоскости которых проходят через прямую, соединяющую точки T, G пересечения линий касания. Теорема доказана.

В практических задачах теорема Монжа применяется чаще всего в тех случаях, когда пересекаются поверхности вращения второго порядка, описанные около общей сферы или вписанные в нее. Рассмотрим несколько задач на построение линии пересечения поверхностей второго порядка для особых случаев их взаимного расположения, удовлетворяющих условиям теоремы Монжа.

Задача 1. *Построить линию пересечения поверхностей кругового конуса и цилиндра вращения, описанных около сферы* (рис. 10.11).

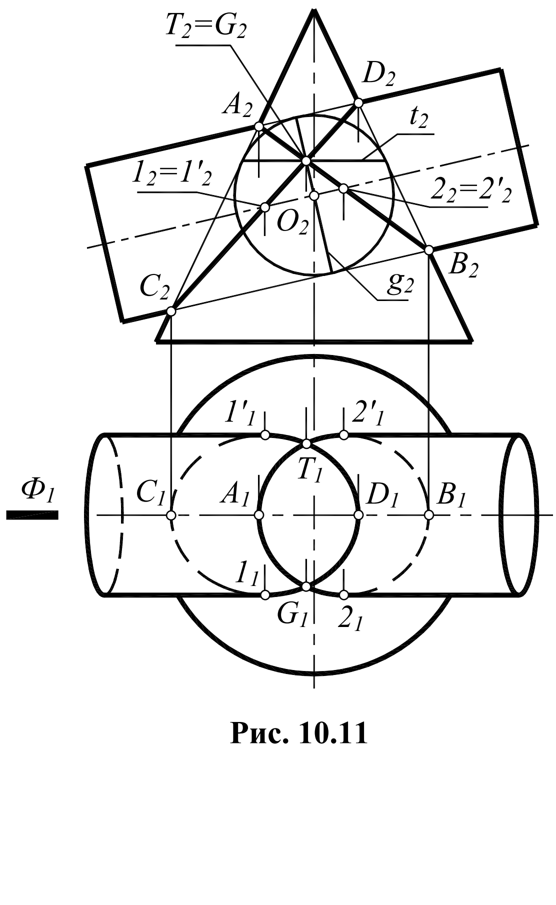

Рис. 10.11

Конус и цилиндр касаются сферы по окружностям t и g, которые пересекаются между собой в точках T и G. Согласно теореме Монжа, в этом случае линиями пересечения данных поверхностей будут два эллипса, плоскости которых проходят через прямую TG, соединяющую точки T, G пересечения линий касания t, g.

Данные поверхности имеют общую плоскость симметрии Φ, параллельную плоскости проекций Π_2. Следовательно, прямая TG занимает фронтально-проецирующее положение. Искомые линии пересечения конуса и цилиндра проецируются на Π_2 отрезками A_2B_2 и C_2D_2, где A, B, C, D – точки пересечения фронтальных очерковых линий конуса и цилиндра (см. рис. 10.11).

На горизонтальной проекции видимость линии пересечения, распавшейся на два эллипса, меняется в точках 1, $1'$ и 2, $2'$, лежащих на горизонтальном очерке цилиндра. Любое количество точек линии пересечения конуса и цилиндра можно построить по их принадлежности к поверхности конуса.

Задача 2. *Построить линию пересечения поверхностей двух цилиндров одинакового диаметра с пересекающимися осями.*

На рис. 10.12–10.14 показаны фронтальные проекции круговых цилиндров одинакового диаметра. Пересекающиеся оси цилиндров параллельны фронтальной плоскости проекций.

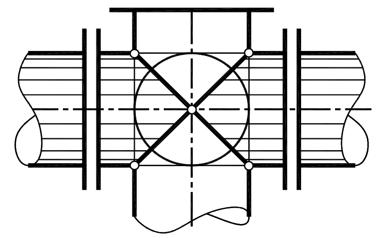

Рис. 10.12

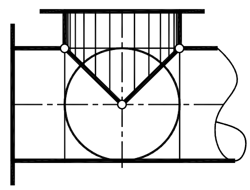

Рис. 10.13

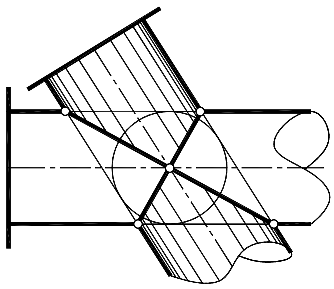

Рис. 10.14

Во всех трех случаях цилиндры описаны около сферы (с центром в точке пересечения осей). В соответствии с теоремой Монжа, линия их пересечения распадается на две плоские кривые (эллипсы), фронтальные проекции которых вырождаются в отрезки прямых линий.

Задача 3. *Спроектировать угловое соединение двух трубопроводов одинакового диаметра.*

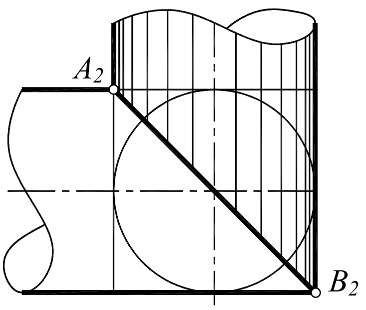

Рис. 10.15

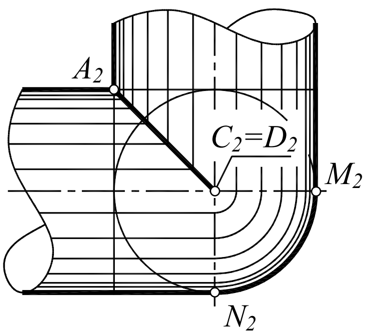

Рис. 10.16

На рис. 10.15 показан простой угловой переходник, предназначенный для соединения цилиндрических трубопроводов с взаимно перпендикулярными осями. Линия AB пересечения соединяемых трубопроводов, в соответствии с теоремой Монжа – эллипс.

При транспортировке по такому трубопроводу жидких или сыпучих тел будет возникать застойная зона в области точки B. Чтобы устранить этот недостаток, сопряжение трубопроводов делают плавным, дополняя его сферической поверхностью. В этом случае переходник состоит из двух цилиндрических поверхностей и четверти сферы. Цилиндрические поверхности касаются сферы по полуокружностям *CMD* и *CND* (рис. 10.16). Линия *CAD* пересечения сопрягаемых трубопроводов – половина эллипса.

Вопросы для повторения

1. Какую поверхность называют алгебраической? Что называют порядком алгебраической поверхности?
2. Перечислить все алгебраические поверхности второго порядка.
3. Каков геометрический алгоритм формирования конической и цилиндрической поверхностей второго порядка?
4. Что называют биквадратной кривой? Перечислить все возможные случаи распадения биквадратной кривой на алгебраические кривые.
5. Как построить круговые сечения эллиптического цилиндра?
6. Как построить круговые сечения прямого эллиптического конуса?
7. Даны два круговых конуса с общей фронтальной плоскостью симметрии, описанные около одной и той же сферы. Очерковая образующая первого конуса параллельна очерковой образующей второго конуса. По какой линии пересекаются данные конусы? Сделать чертеж.