Лекция 1

ПРЕДМЕТ И ОСНОВНОЙ МЕТОД НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

В учебном курсе начертательной геометрии изучают *теоретические основы построения плоских изображений пространственных фигур и способы графического решения пространственных задач при помощи этих изображений.*

Предмет начертательной геометрии – *все многообразие геометрических фигур трехмерного пространства*.

Известны три основных способа построения изображений: аксиоматический, аналитический и конструктивный. При аксиоматическом способе связь между фигурами пространства и их изображениями устанавливается посредством системы аксиом. При аналитическом способе точкам ставятся в соответствие их координаты, поверхностям – уравнения, линиям – системы уравнений. При конструктивном способе между фигурой пространства и ее изображением устанавливается непосредственная геометрическая связь с помощью *проецирующих линий и поверхностей*.

В курсе начертательной геометрии рассматривают конструктивный способ построения изображений. Поэтому основным методом начертательной геометрии является *метод проецирования*.

1.1. Центральное и параллельное проецирование

Чтобы построить изображение (проекцию) произвольной точки A, выбирают плоскость проекций Π_1 и точку S, которую называют *центром проекций* (рис. 1.1). Проводят проецирующую прямую SA и отмечают точку A_1 пересечения прямой SA с плоскостью проекций. Такое проецирование называют *центральным*, а точку A_1 называют *центральной проекцией* точки A на плоскость Π_1.

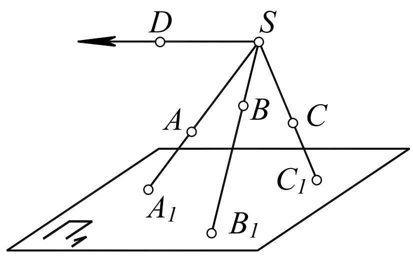

Рис. 1.1

На плоскости Π_1 можно построить проекции всех точек A, B, C,… пространства, за исключением тех, которые лежат в плоскости, параллельной Π_1 и проходящей через центр S. Например, через точку D (см. рис. 1.1) проходит проецирующий луч SD, параллельный плоскости проекций Π_1. В этом случае считают, что проекция D_1 точки D находится в бесконечности, а евклидово пространство дополняют *несобственными* (бесконечно удаленными) точками. Получается *расширенное евклидово пространство*.

Всякая прямая такого пространства пополняется одной несобственной точкой. У всякой плоскости есть одна несобственная прямая, состоящая из несобственных точек всех прямых данной плоскости. Все несобственные точки и прямые расширенного евклидова пространства принадлежат несобственной плоскости этого пространства.

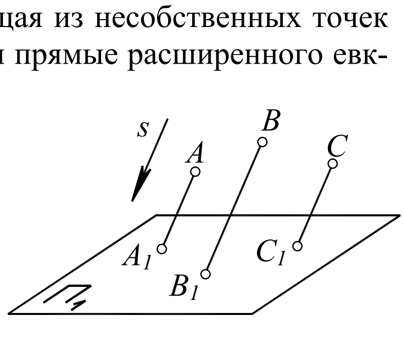

Рис. 1.2

В расширенном трехмерном евклидовом пространстве плоскость и прямая линия всегда пересекаются (в собственной или несобственной точке). Две плоскости пересекаются по собственной или несобственной прямой. Прямые, лежащие в одной плоскости, всегда пересекаются (в собственной или несобственной точке).

Если центр проекций S “удалить в бесконечность”, то проецирующие лучи становятся параллельны друг другу и определяют *направление* *проецирования s* (рис. 1.2). Такое проецирование называют *параллельным*, а точки A_1, B_1, C_1 – называют *параллельными проекциями* точек A, B, C. Параллельное проецирование – частный случай центрального проецирования.

1.2. Свойства параллельного проецирования

1. Проекция точки есть точка.

2. Проекция прямой – в общем случае прямая. Но если прямая параллельна направлению проецирования, то проекция прямой вырождается в точку (прямая MN на рис. 1.3). Плоскость Δ, образованная проецирующими лучами, называется *проецирующей плоскостью*. Проекция прямой образуется на пересечении плоскости Δ с плоскостью проекций Π_1.

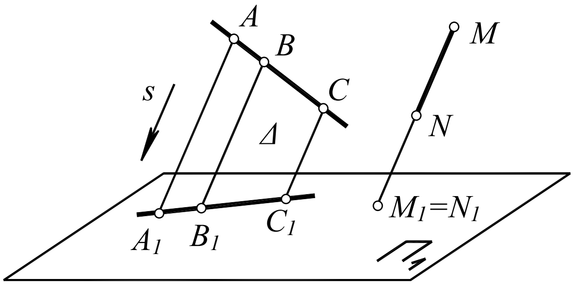

Рис. 1.3

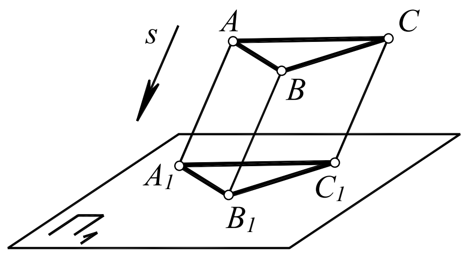

Рис. 1.4

Следствие 1. Для построения проекции прямой достаточно построить проекцию двух ее точек.

Следствие 2. Если точка принадлежит прямой линии, то проекция точки принадлежит проекции прямой линии.

3. Если плоская геометрическая фигура параллельна плоскости проекций (рис. 1.4), то проекция фигуры *конгруэнтна* самой фигуре (конгруэнтными называют фигуры, совпадающие при наложении).

4. Проекции параллельных прямых параллельны (рис. 1.5).

5. Точка пересечения линий проецируется в точку пересечения их проекций (рис. 1.6).

6. Проекция предмета не меняется при параллельном переносе плоскости проекций (рис. 1.7).

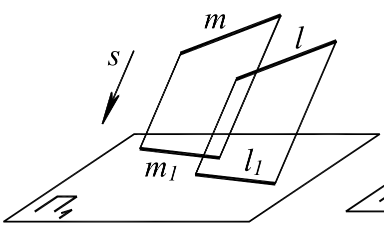

Рис. 1.5

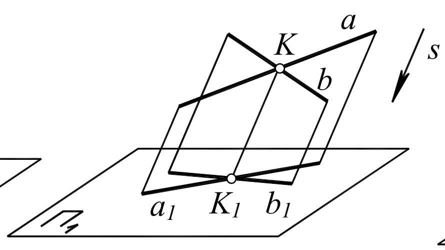

Рис. 1.6

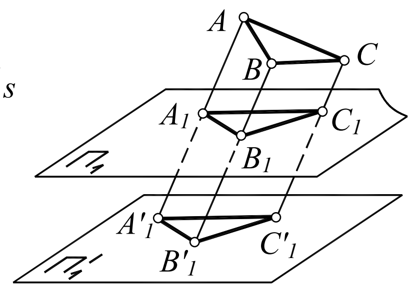

Рис. 1.7

7. Если точка делит отрезок прямой в каком-то отношении, то проекция точки делит проекцию отрезка в таком же отношении. Например, на рис. 1.3 точка B делит отрезок AC в отношении $AB:AC=1:3$. Проекция B_1 точки B делит проекцию A_1C_1 отрезка AC в точно таком же отношении: $A_1B_1:A_1C_1=AB:AC=1:3$.

1.3. Ортогональное проецирование

Если направление проецирования перпендикулярно к плоскости проекций, то параллельное проецирование называют *ортогональным* (прямоугольным), а проекцию предмета называют *ортогональной проекцией*. Например, на рис. 1.8 показана ортогональная проекция A_1 точки A на плоскость Π_1.

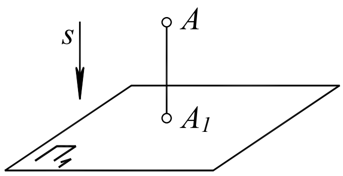

Рис. 1.8

Все вышеперечисленные свойства параллельного проецирования справедливы для ортогонального проецирования. Требует количественного дополнения только седьмое свойство, в соответствии с которым точка B делит отрезок AC в том же отношении, в каком проекция B_1 точки B делит проекцию A_1C_1 отрезка AC, то есть $A_1B_1{:}A_1C_1=AB{:}AC$ (рис. 1.9).

Последнее соотношение можно переписать в виде: $A_1C_1{:}AC=A_1B_1{:}AB$. В случае ортогонального проецирования это соотношение можно вычислить, зная угол наклона α отрезка AC к плоскости проекций. Из рассмотрения прямоугольного треугольника ACC_0 и учитывая, что $AC_0=A_1C_1$, получаем:

$$A_1C_1 = AC \cdot \cos\alpha .$$

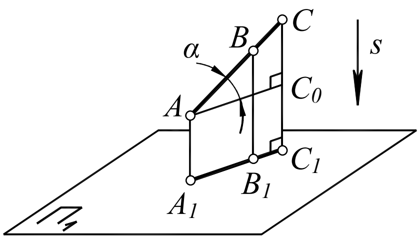

Рис. 1.9

Отсюда следует, что $A_1C_1{:}AC=\cos\alpha$, то есть *в случае ортогонального проецирования отношение длины проекции отрезка к длине самого отрезка равно косинусу угла наклона отрезка к плоскости проекций*. Величину $\cos\alpha$ называют “коэффициентом искажения”. Коэффициент искажения показывает, во сколько раз длина проекции отрезка меньше, чем длина самого отрезка. Например, если угол наклона отрезка AC к плоскости Π_1 составляет $60°$, то коэффициент искажения равен $\cos 60°=0,5$. Это означает, что длина A_1C_1 проекции отрезка AC в два раза меньше, чем истинная длина самого отрезка.

Рассмотренное дополнительное свойство ортогонального проецирования будет использовано в следующей лекции для определения истинной длины отрезка по его изображению на ортогональном чертеже.

Вопросы для повторения

1. Что составляет предмет начертательной геометрии?
2. Какой основной метод построения плоских изображений пространственных фигур используется в начертательной геометрии?
3. Перечислить основные свойства параллельного проецирования.
4. В каком случае проекция плоской фигуры конгруэнтна самой фигуре?
5. Дать определение понятию “ортогональное проецирование”.
6. Как определить истинную длину отрезка, если известна длина его ортогональной проекции и известен угол наклона отрезка к плоскости проекций?